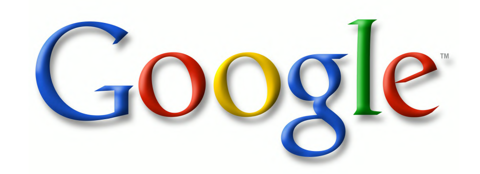
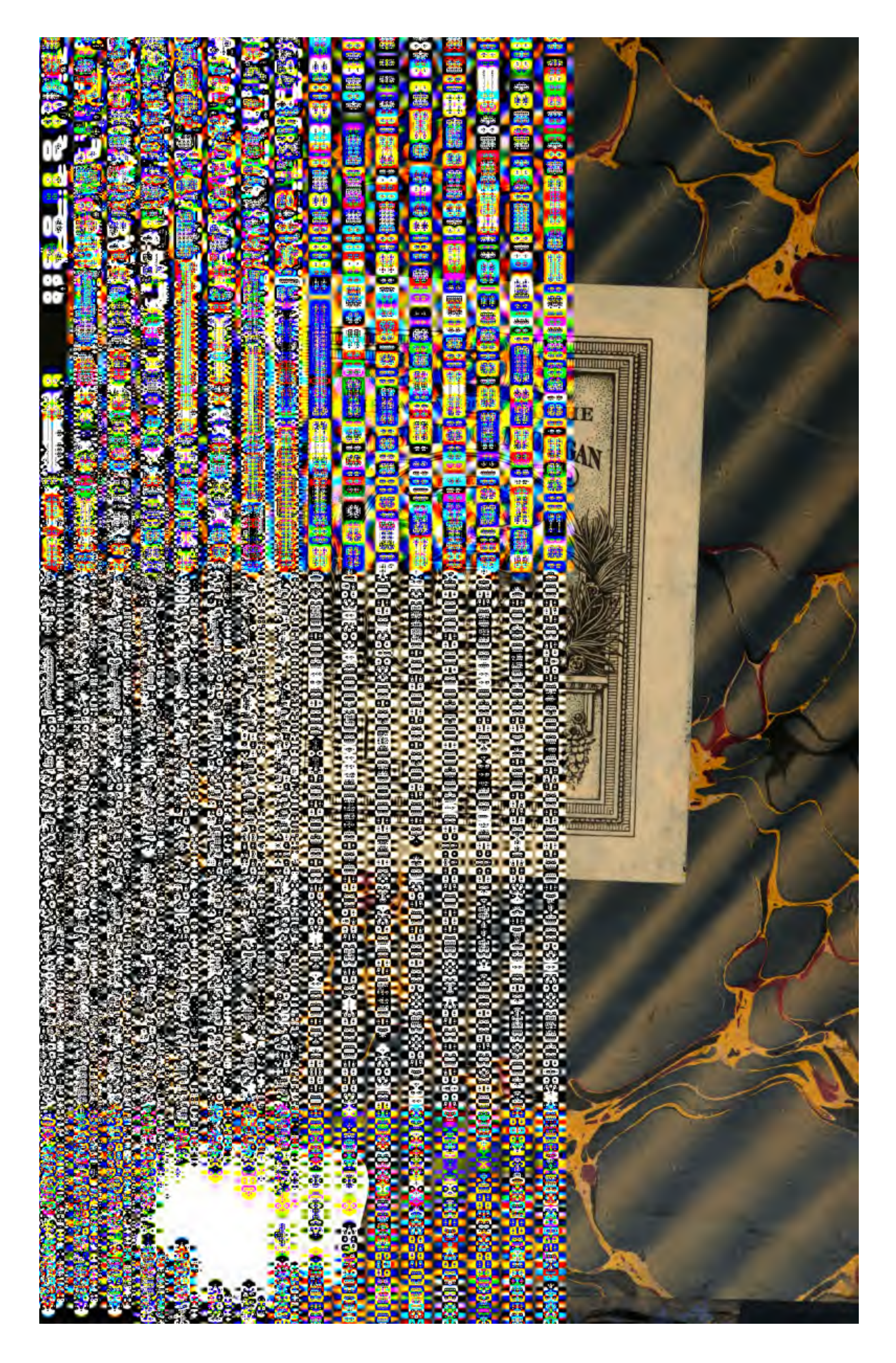
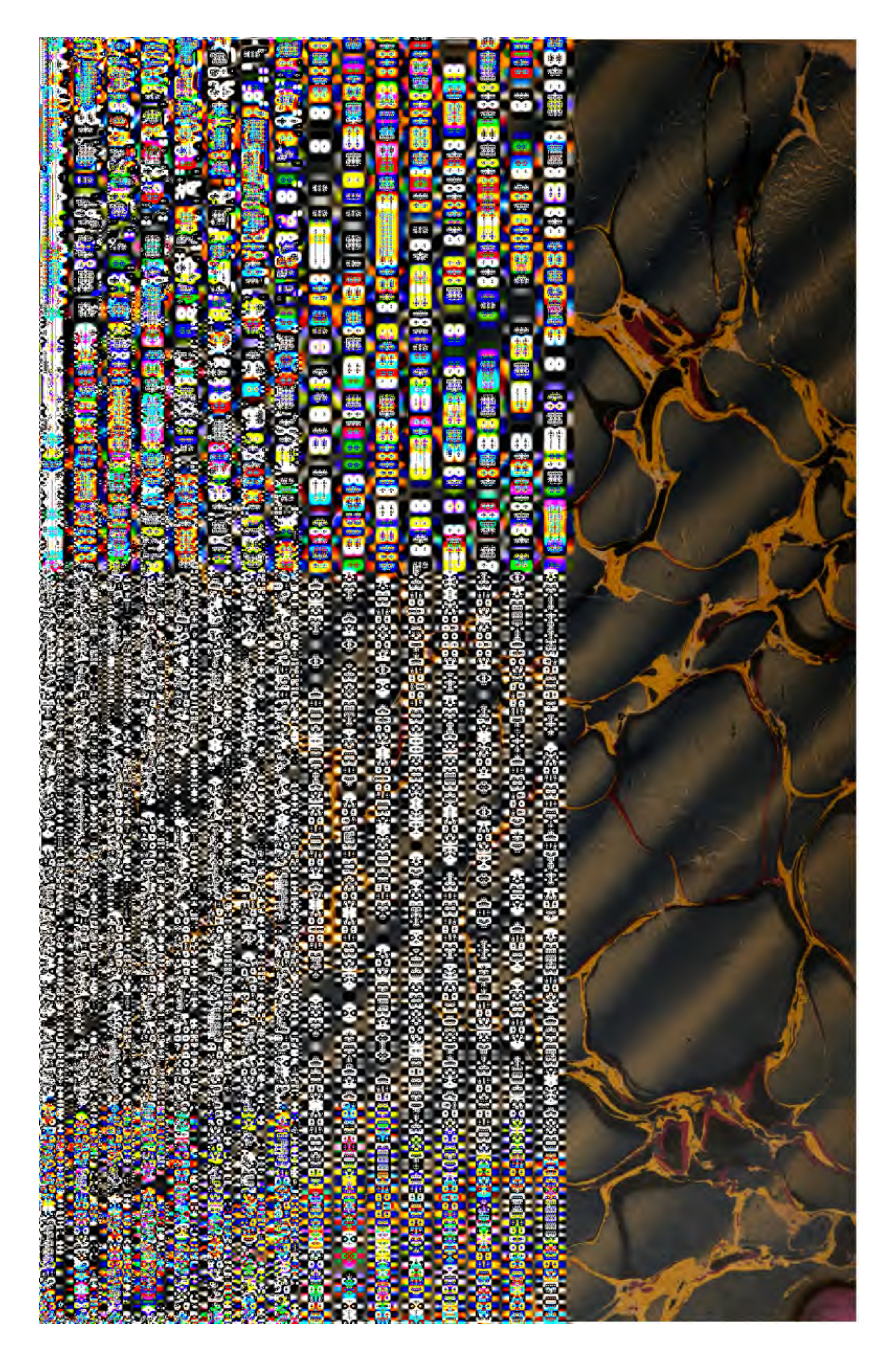
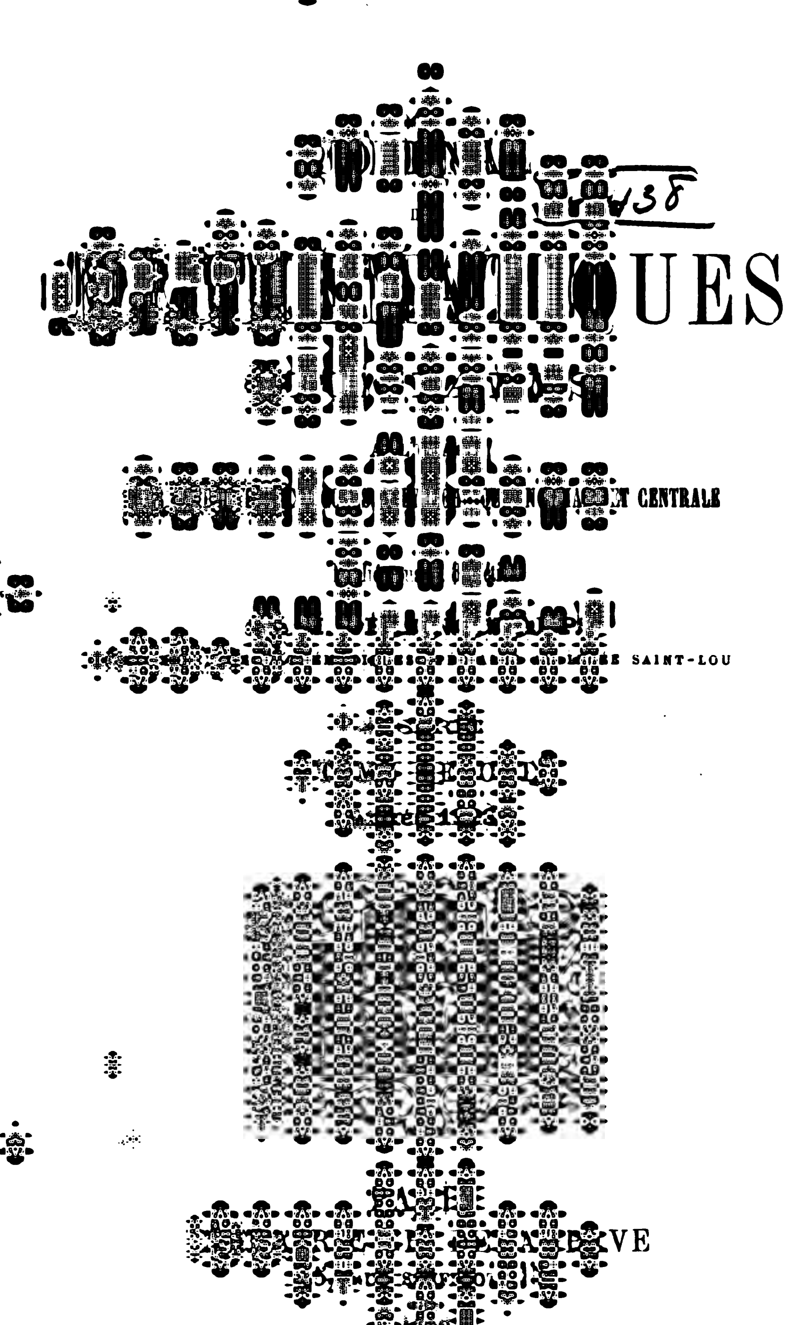








UES

T CENTRALE

SAINT-LOU

VE

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

ESSAI D'UNE DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE LAPLACE
RELATIVE AU DÉVELOPPEMENT DES DÉTERMINANTS

Par Mme Ve **F. Prime.**

La théorie des déterminants, jadis imaginée par Leibniz *(Lettre au marquis de l'Hospital, 28 avril 1693)*, venait d'être réinventée par Cramer *(Introduction à l'analyse des courbes planes, 1750)*, et Bezout avait publié sa règle pour le développement de la résultante d'un système d'équations linéaires *(Histoire de l'Académie royale des Sciences, 1764)*. Laplace, rencontrant cette résultante dans ses *Recherches sur le calcul intégral et le système du monde (Histoire de l'Académie royale des Sciences, 1772, seconde partie)*, reproduisit la règle de Bezout, puis en exposa une plus simple. « Voici maintenant, dit-il (*loc. cit.* page 300), un procédé fort simple qui peut considérablement abréger le calcul de l'équation de condition entre les lettres a, b, c,... » Ce procédé consiste à passer du cas de deux équations à celui de trois, de celui-ci au cas de quatre, et ainsi de suite.

En 1841, Jacobi introduisit le procédé de Laplace au chapitre 8 de son mémoire « *De formatione et de proprietatibus Determinantium* » (*Journal de Crelle*, tome XXII), il l'énonça sous forme de théorème et en déduisit une formule dont il apprécie l'utilité en ces termes : « Formula proposita expediri potest Determinantis indagatio si Determinantia partiala, quæ singulorum productorum factores constituunt, valoribus simplicibus gaudent. »

Les démonstrations que l'on donne aujourd'hui du théorème

de Laplace sont laborieuses (*); celle que nous proposons, dans cet article, est une conséquence immédiate du théorème de Binet et Cauchy sur la multiplication des déterminants simples et multiples et des relations, bien connues, entre un déterminant et son déterminant adjoint.

Etant donné le déterminant

$$\theta = (a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}),$$

nous désignerons, par le symbole $\alpha_{ij,\,kl,\,\ldots\,rs}$, ce qu'il devient quand on annule les éléments des colonnes $j, l, \ldots s$, à l'exception des éléments $a_{ij}, a_{kl}, \ldots a_{rs}$ que l'on remplace par l'unité. Il résulte immédiatement, de la définition, des déterminants, que le déterminant $\alpha_{ij,\,kl,\,\ldots\,rs}$ est, dans le développement de θ, le coefficient du produit $a_{ij}a_{kl} \ldots a_{rs}$; si les indices $j, l, \ldots s$ sont en nombre p, $\alpha_{ij,\,kl,\,\ldots\,rs}$ est un $p^{\text{ième}}$ mineur du déterminant θ.

Le déterminant $(a_{ij}, a_{kl} \ldots a_{rs})$ formé des éléments qui, dans θ, sont situés aux points de croisement des lignes $i, k, \ldots r$ et des colonnes $j, l, \ldots s$, est le déterminant complémentaire du mineur $\alpha_{ij,\,kl,\,\ldots\,rs}$.

Ces définitions et notations admises, on peut énoncer le théorème de Laplace comme il suit :

Le développement du déterminant

$$\theta = (a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn})$$

est donné, en fonction des mineurs de classe $p < n$, *par la formule*

$$\theta = \sum_{j,\,l,\,\ldots\,s} (a_{ij},\, a_{kl},\, \ldots\, a_{rs}).\, \alpha_{ij,\,kl,\,\ldots\,rs},$$

dont le second membre contient autant de termes que l'on peut faire de combinaisons avec n *objets, en les prenant* p *à* p.

Soit
$$H = (\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots \alpha_{nn}),$$
le déterminant adjoint du déterminant θ ; faisons le produit des déterminants multiples :

$$\left\| \begin{matrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots\ldots & a_{in} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots\ldots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots\ldots & a_{rn} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \ldots\ldots & \alpha_{in} \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots\ldots & \alpha_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \ldots\ldots & \alpha_{rn} \end{matrix} \right\|$$

(*) Voir Mansion, *Déterminants* (Exercices 4, 13, 27, 33).

formés des éléments des lignes $i, k, \ldots r$ des déterminants θ, H. En vertu du théorème de Binet et Cauchy, il vient ainsi

$$\theta^p = \sum_{j, l, \ldots s} (a_{ij}, a_{kl}, \ldots a_{rs}).(\alpha_{ij}, \alpha_{kl}, \ldots \alpha_{rs}).$$

Mais, d'après la théorie des déterminants adjoints,

$$(\alpha_{ij}, \alpha_{kl}, \ldots \alpha_{rs}) = \theta^{p-1}.\ \alpha_{ij, kl, \ldots rs}.$$

On a donc bien

$$\theta = \sum_{j, l, \ldots s} (a_{ij}, a_{kl}, \ldots a_{rs}).\alpha_{ij, kl, \ldots rs}\ (*).$$

NOTE DE MÉCANIQUE

Par M. H. ...

1. Sur le principe de Galilée. — Le principe de Galilée peut se démontrer en prenant pour base un autre principe, que l'esprit admet plus facilement et qu'on peut énoncer sous la forme suivante :

« *La matière n'est pas douée de libre arbitre.* »

Considérons un point matériel soumis :

1° A l'action de sa vitesse initiale,

2° A celle des forces F. F′, F″, ...

S'il n'était soumis qu'à l'action de sa vitesse initiale, il parcourrait, dans le temps dt, un espace dont nous désignerons les composantes, parallèles à trois axes rectangulaires, par a, b, c.

Si, partant du repos, il était soumis à l'action de la seule force F; dans ce même temps dt, il décrirait un certain chemin; soient α, β, γ les composantes, etc.

Or, *si le point n'est pas doué de libre arbitre*, la projection A, sur l'axe de x, du chemin qu'il décrira dans le temps dt, sera fonction de $a, b, c,\ \alpha, \beta, \gamma\ldots$

Posons donc

$$A = \varphi(a, b, c,\ \alpha, \beta, \gamma,\ \alpha', \beta', \gamma' \ldots).$$

(*) M. Catalan a donné une autre démonstration de ce théorème dans les Mémoires et Bulletins *de l'Académie de Belgique.*

Dans cette égalité a, b, c représentent des infiniment petits du premier ordre; mais α, β, γ... sont du *second ordre*. En effet, sous l'influence d'une force, un point parcourt, en projection, un chemin $s + s't + s''t^2 + \dots$ On peut supposer s nul, pour $t = 0$. D'autre part, s' est nul; car s' est la vitesse initiale, vitesse nulle, par hypothèse; donc α est du deuxième ordre, au moins. D'après cela, en développant A, et en bornant l'approximation au deuxième ordre, on aura

$$A = ma + nb + pc + ga^2 + hab + \dots$$
$$+ M\alpha + N\beta + P\gamma + M'\alpha' + \dots$$

Or, pour $\alpha = \beta = \gamma = \alpha' \dots = 0$, on a $A = a$; donc

$$m = 1, \quad n = 0, \quad p = 0, \quad g = 0.$$

Ecrivons donc

$$A = a + M\alpha + N\beta + P\gamma + \dots$$

Si, dans cette égalité, on fait $a = 0$, $\alpha' = 0$, $\beta = 0 \dots$ on doit avoir $A = \alpha$; donc $M = 1$, $N = 0$, $P = 0$, etc. Finalement

$$A = a + \alpha + \alpha' \dots$$

égalité qui est la traduction du principe de l'indépendance.

2. Sur un postulatum. — On peut démontrer que *la condition nécessaire et suffisante pour que deux forces appliquées à un solide se fassent équilibre est qu'elles soient égales et directement opposées.*

Voici cette démonstration

Pour qu'un solide soit en équilibre, il faut et il suffit que chacun de ses points soit en équilibre, il faut donc que la somme des projections sur un axe de toutes les forces agissant en un point quelconque A du corps, que nous supposons en équilibre, soit nulle, et par suite que la somme des projections de *toutes* les forces, tant intérieures qu'extérieures agissant sur le solide, soit nulle. Or les forces intérieures sont égales deux à deux et de sens contraires, elles disparaissent de la somme en question. Cette observation s'applique aux moments de ces forces par rapport à un axe.

Ainsi, pour qu'un solide soit en équilibre il faut:

1° Que la somme des projections des forces extérieures sur trois axes rectangulaires soit nulle.

2° Que la somme des moments des mêmes forces par rapport à ces trois axes soit nulle.

Ces conditions sont suffisantes, car si n est le nombre des points du solide, il faut trois conditions pour exprimer que trois points sont à des distances invariables ; il faut ensuite $3(n-3) = 3n-9$ conditions nouvelles pour exprimer que la position des autres points, par rapport à ceux-ci, est fixe. Il reste $3n - [3 + 3(n-3)] = 6$ conditions à écrire, pour exprimer qu'il y a équilibre ; donc, etc.

D'après cela, pour qu'un système de deux forces de composantes X, Y, Z et X', Y', Z', appliquées aux points (x, y, z), (x', y', z'), soit en équilibre, il faut que l'on ait :

$$X + X' = 0, \qquad Y + Y' = 0, \qquad Z + Z' = 0,$$
$$Yz - Zy + Yz' - Zy' = 0 \ldots$$

On a donc

$$X = -X', \qquad Y = -Y' \qquad Z = -Z'.$$

et
$$Y(z - z') - Z(y - y') = 0 \ldots$$

Ainsi, les forces sont égales et de sens contraires ; de plus, les égalités

$$\frac{X}{x - x'} = \frac{Y}{y - y'} = \frac{Z}{z - z'},$$

prouvent qu'elles sont dirigées dans le sens de la droite qui unit les points d'application.

SUR LA SOMME DES CARRÉS
DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

Cette somme peut être calculée par des procédés divers, bien connus pour la plupart, mais dont il nous paraît intéressant de rappeler ici les plus simples.

1. — Dans une lettre de Laplace à Lagrange (*) du 11 août 1780, on trouve le passage suivant :

« On a, dit Laplace,

$$d^n uy = ud^n y + \frac{n}{1} dud^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2ud^{n-2}y + \ldots$$

(*) Voyez la note communiquée, à ce sujet, par M. Mister au Journal de MM. Mansion et Neuberg ; numéro de novembre 1892, p. 251.

Soit $$y = u = x^n;$$
on aura
$$d^n x^{2n} = 1.2\ldots n.x^n \left\{ 1 + \left[\frac{n}{1}\right]^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 + \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2 + \ldots \right\}$$
$$= 2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)x^n,$$
ce qui donne
$$1 + \left[\frac{n}{1}\right]^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 + \ldots = \frac{1.2.3\ldots 2n}{(1.2.3\ldots n)^2} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} 2^n.$$
C'est la formule connue.

2. — M. Mister, *loc. cit.*, rappelle la démonstration classique; on la trouvera exposée dans notre Algèbre, § 35.

Mais en voici deux autres, encore très simples.

3. — Si nous imaginons m lettres grecques et n lettres romaines; en groupant les combinaisons p à p de ces $m + n$ lettres de la manière suivante :

1° Celles qui ne renferment que des lettres grecques ; elles sont en nombre C_m^p;

2° Celles qui renferment une lettre romaine et $(m - 1)$ lettres grecques, etc.,

on a $$C_{m+n}^p = C_m^p + C_n^1 C_{p-1}^m + C_n^2 C_{p-2}^m + \ldots$$
formule dans laquelle on suppose, bien entendu,
$$m \geqslant p, \quad n \geqslant p.$$

En supposant $m = n = p$, et en observant que
$$C_m^i = C_m^{m-i},$$
on a $$C_{2m}^m = C_m^m + (C_m^{m-1})^2 + (C_m^{m-2}) + \ldots$$

On retrouve, ainsi, la formule connue (*).

4. — Enfin, comme nous l'a fait observer M. Neuberg, à propos de la communication que nous lui avions faite de la démonstration précédente, on peut encore déduire la formule en question de celle qui fait connaître la dérivée d'ordre n du produit $y = (x - a)^n(x - b)^n$. Cette dernière démonstration se rapproche singulièrement de celle de Laplace (**).

La formule de Leibniz, celle qu'emploie Laplace dans la

(*) Nous ignorons quel est l'auteur de cette démonstration que nous avons communiquée à M. Neuberg (V. *Mathesis*, décembre 1892, p. 272). Peut-être l'un de nos correspondants nous donnera-t-il ce renseignement.

(**) Cette démonstration est de M. H. Laurent. (Voyez, *Nouvelles Annales* 870, p. 420; question 869.)

lettre citée, appliquée à la fonction $(x-a)^n(x-b)^n$ donne (*)

$$(1)\quad y^{(n)} = n!\left\{(x-a)^n + \left[\frac{n}{1}\right]^2 (x-a)(x-b)^{n-1} + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 (x-a)^2(x-b)^{n-2} + \dots\right\}$$

En supposant $a = b$, on a

$$y = (x-a)^{2n},$$

et, par suite,

$$(2)\qquad y^{(n)} = 2n(2n-1)\dots(n+1)(x-a)^n.$$

En faisant $a = b$, dans l'égalité (1), et en comparant le résultat correspondant avec celui qui est indiqué par l'égalité (2), il vient

$$2n(2n-1)\dots(n+1) = n!\left\{1 + \left[\frac{n}{1}\right]^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 + \dots\right\}.$$

G. L.

SUR L'INTÉGRALE $Y = \int \frac{dx}{\sin x(a + b\cos x)}$.

1. — On sait comment (**), en partant de l'identité

$$\frac{1}{\sin x(a+b\cos x)} = \frac{a}{(a^2-b^2)\sin x} - \frac{b\cos x}{(a^2-b^2)\sin x} - \frac{b^2\sin x}{(a^2-b^2)(a+b\cos x)}$$

on trouve l'intégrale en question, intégrale qui est donnée par la formule

$$(1)\quad Y = \int \frac{dx}{\sin x(a + b\cos x)} = \frac{b}{a^2-b^2}\,L(a + b\cos x)$$
$$+ \frac{a}{a^2-b^2}\,L\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - \frac{b}{a^2-b^2}\,L\sin x.$$

2. — Ce résultat, par une transformation facile, peut se mettre sous la forme plus simple

(*) V. *Algèbre*, p. 323.

(**) Voyez Bertrand, *Calcul intégral*, § 92. La formule indiquée *(loc. cit.)*, renferme une faute de signe qui est rectifiée dans celle que nous donnons plus loin.

(2) $$\int \frac{dx}{\sin x(a + b\cos x)} =$$
$$\frac{1}{a+b}\left[\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \frac{b}{a-b}\,\mathrm{L}\left(a + b + \overline{a-b}\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)\right],$$
égalité à laquelle on parvient directement en suivant la méthode générale d'intégration pour les fonctions du genre trigonométrique, méthode qui consiste à remplacer sin x, cos x, dx, respectivement par
$$\frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \left(t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right).$$
On a, en, effet,
$$(a+b)\frac{(1+t^2)}{t[a+b+(a-b)t^2]} = \frac{1}{t} + \frac{2bt}{a+b+\overline{a-b}t^2},$$
et, de là, on déduit la relation (2).

3. — Mais, dans le cas présent, il est plus simple d'effectuer l'intégration, par le changement de variable, en posant
$$\cos x = t.$$
On a, alors $$-\sin x.dx = dt.$$
et, par suite
$$\mathrm{Y} = -\int \frac{dt}{(1-t)(1+t)(a+bt)}.$$
En décomposant, en fractions simples, la fraction rationnelle
$$\frac{1}{(1-t)(1+t)(a+bt)}$$
on arrive rapidement à l'intégrale Y, sous sa forme simple.

4. — Pourtant, quelle que soit la marche adoptée, on est obligé de supposer $a^2 - b^2 \neq 0$ et en effet, la formule trouvée, n'est pas applicable lorsque l'on suppose $a = \pm b$.

Dans ce cas, l'intégrale se trouve directement et très simplement, comme nous allons l'indiquer. Cette remarque est sans importance; si nous la faisons, c'est qu'elle nous fournit, en même temps qu'un exercice de calcul utile, l'occasion de rappeler que certaines formules, donnant l'intégrale d'une fonction donnée, sont en défaut dans des cas particuliers et, qu'alors, elles doivent être obtenues par un calcul direct.

5. — En supposant $a = b$, par exemple, il s'agit de calculer

$$z = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sin x\,(1 + \cos x)}$$

On a, successivement,

$$z = \frac{1}{4a}\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}},$$

$$z = \frac{1}{4a}\int \frac{\left(\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}\right)dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}},$$

$$z = \frac{1}{2a}\int \frac{\frac{1}{2}\sin \frac{x}{2}.dx}{\cos^3 \frac{x}{2}} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Par conséquent,

$$z = \frac{1}{2a}\,\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4a\cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Un calcul analogue donnerait l'intégrale

$$\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sin x\,(1 - \cos x)}.$$

(G. L.)

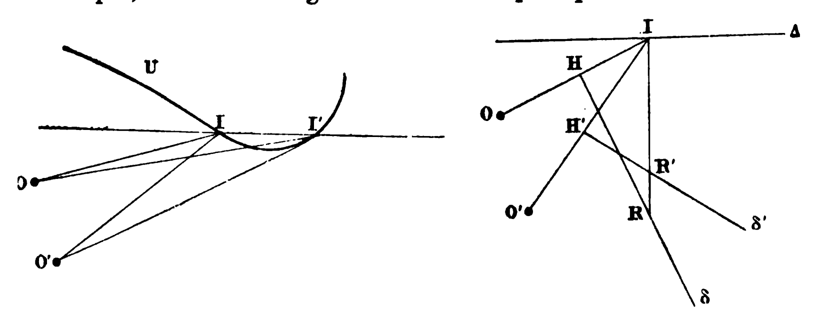
SUR LA CONSTRUCTION DES TANGENTES
AUX COURBES

1. — Parmi les procédés comportant une certaine généralité et permettant de tracer les tangentes en un point pris sur une courbe, on peut indiquer ceux que nous allons examiner et qui nous paraissent susceptibles de nombreuses applications.

Soient I, I' deux points infiniment voisins, sur une courbe U. Ayant choisi deux points fixes O, O', que nous appellerons les pôles de U, pour la commodité du langage, on pose

$$IOI' = \alpha, \quad IO'I' = \alpha'.$$

Les angles α, α' sont deux infiniment petits; supposons que l'on puisse déterminer la quantité k, qui représente la limite du rapport $\frac{\alpha'}{\alpha}$, quand I′ vient se confondre avec I. Alors il est facile de montrer que l'on pourra, par une construction simple, obtenir la tangente en I. Voici pourquoi.



Considérons les circonférences Δ, Δ', circonscrites respectivement aux triangles IOI′, IO′I′; et désignons par ρ, ρ' leurs rayons. Nous avons

$$\frac{\mathrm{II'}}{\sin\alpha} = 2\rho, \qquad \frac{\mathrm{II'}}{\sin\alpha'} = 2\rho',$$

et, par suite,

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}.$$

En passant à la limite, il vient

$$\lim\frac{\rho}{\rho} = \lim\frac{\alpha'}{\alpha} = k.$$

Cela posé, traçons la normale en I à la courbe U (normale que nous nous proposons de déterminer) et les perpendiculaires δ, δ', aux droites IO, IO′ en leurs milieux. Soient R, R′ les points où cette normale rencontre les droites δ, δ'. Alors R, R′ représentent les centres des circonférences II′O, II′O′, à la limite, quand I′ est confondu avec I.

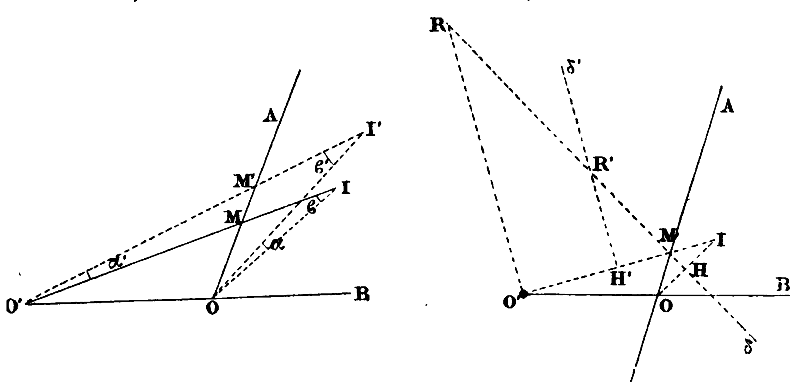
On a donc, d'après cette remarque,

$$\frac{\mathrm{IR}}{\mathrm{IR'}} = \frac{\rho}{\rho'} = k.$$

La construction de la normale en I se trouve ramenée au problème suivant, problème élémentaire bien connu : tracer, par un point I, une droite rencontrant deux droites données

en des points dont les distances à ce point I sont dans un rapport donné en grandeur et en signe (*).

2. — Appliquons cette remarque à la strophoïde oblique. La génération classique de cette courbe, point par point, consiste, comme on sait : deux droites O′A, OO′ étant données,



à prendre sur chaque vecteur issu de O′ et rencontrant O′A en M, un point I tel que MI = MO.

En considérant deux points I, I′, infiniment voisins sur la strophoïde, nous allons chercher la limite du rapport

$$\frac{\text{IOI}'}{\text{IO}'\text{I}'}.$$

Nous remarquerons d'abord que

(1) $$\alpha + \beta = \alpha' + \beta'.$$

D'ailleurs, les triangles IMO, I′M′O étant isoscèles, nous avons

(2) $$\beta - \beta' = \alpha.$$

Des égalités (1), (2) nous déduisons

$$\alpha' = 2\alpha.$$

Ainsi, dans cet exemple, la quantité désignée par k dans le paragraphe précédent, est égale à 2.

Au point H, milieu de OI, élevons une perpendiculaire δ (**), et, de même, une perpendiculaire δ′ au point H′ milieu de

(*) La présente remarque s'applique très simplement aux *Courbes sectrices*, étudiées par M. Schoute. (V. *Journal*, 1885, p. 172, etc.)

(**) On peut observer, incidemment, qu'elle passe par M.

O′I. Pour tracer la normale, en I, à la strophoïde considérée, il faut mener, par I, une transversale coupant δ, δ' aux points R, R′ et de telle sorte que $IR = 2\,IR'$. A cet effet, ayant élevé en O′ une perpendiculaire qui rencontre δ au point R, on voit que IR sera coupée par δ' en son milieu; IR est la normale cherchée.

On peut donc, d'après cela, énoncer le théorème suivant qui donne une construction très simple, et peut-être nouvelle, de la normale à la strophoïde oblique.

Théorème. — *Étant donnés une droite* OA *et un point fixe* O′*; si, par* O′*, on mène une transversale mobile rencontrant* OA *en* M*, et si l'on prend* $MI = MO$*,* I *décrit une strophoïde oblique.*

La perpendiculaire élevée, en O′*, à* O′I*; et la perpendiculaire abaissée, de* M *sur* OI*, se coupent sur la normale en* I.

En appliquant la méthode qui précède, on doit observer qu'il faut tenir compte, avec soin, des signes des infiniment petits α, α'; le rapport k, considéré dans la construction à laquelle conduit cette méthode, est, suivant les cas, *positif* ou *négatif*.

(A suivre.) *(G. L.)*

THÉORÈME SUR LES CUBIQUES (*)

Par Mme Vve **Prime**.

Toute cubique, circonscrite au triangle de référence et au triangle anticomplémentaire, et qui passe par le centre de gravité de ces triangles, est anallagmatique dans la transformation par points réciproques.

Toute cubique, circoncrite au triangle de référence et qui passe par les centres des circonférences inscrite et ex-inscrites, est anallagmatique dans la transformation par points inverses.

Il suffit de justifier le premier de ces énoncés.

Soient : φ la cubique considérée;

(*) Voir: Contribution à l'étude des cubiques (*Journal*, 1892).

M, N, deux de ses points;
M′, N′ les réciproques des points M, N;
P le point d'intersection des droites MM′, NN′.

On sait que toutes les cubiques qui passent par huit points fixes, passent aussi par un neuvième point. Or, toutes les cubiques anallagmatiques, menées par les points A, B, C, G, G_a, G_b, G_c, M (ou N) contiennent aussi M′ (ou N′); la cubique φ passe donc par les points M′, N′. Faisons tourner la droite PM autour du point P : les points M, M′ engendrent la cubique anallagmatique associée au point P; cette cubique et φ, ont en commun les points A, B, C, G, G_a, G_b, G_c, M, M′, N, N′; elles sont donc identiques.

— La réciproque du théorème précédent n'est pas vraie; ainsi la cubique représentée par

$$k\alpha\beta\gamma + \sum l\alpha(\beta^2 + \gamma^2) = 0$$

est anallagmatique ; cependant elle ne passe pas, à la fois, par les quatre points G, G_a, G_b, G_c.

SUR LES CYCLIQUES PLANES

Par M. **F. Michel**, lieutenant du Génie.

(*Suite*, voir page 271.)

VIII. — Propriétés des poles principaux des cercles directeurs et des foyers d'une cyclique.

1. — Reprenons l'équation

$$\Psi(\lambda) \equiv 4D^2(C + \lambda) + 4E^2(A + \lambda) - (4F - \lambda^2)(A + \lambda)(C + \lambda) = 0,$$

qui donne les λ des quatre pôles principaux d'une cyclique, et rappelons que les coordonnées de ces pôles sont

$$x = -\frac{D}{A + \lambda}, \qquad y = -\frac{E}{C + \lambda}.$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Les pôles principaux forment un groupe orthocentrique, c'est-à-dire que chacun de ces points est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres.*

Soient, en effet, p_1, p_2, p_3, p_4, ces quatre pôles, correspondant aux valeurs de λ : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$; pour démontrer le théorème, il suffira de faire voir, par exemple, que la perpendiculaire abaissée du point p_1 sur la droite $p_2\, p_3$ passe par le point p_4. L'équation de cette perpendiculaire est :

$$y + \frac{E}{C+\lambda_1} = - \frac{\dfrac{D}{A+\lambda_3} - \dfrac{D}{A+\lambda_2}}{\dfrac{E}{C+\lambda_3} - \dfrac{E}{C+\lambda_2}} \left(x + \frac{D}{A+\lambda_1}\right).$$

Or, l'expression

$$\left(\frac{E}{C+\lambda_1} - \frac{E}{C+\lambda_4}\right)\left(\frac{E}{C+\lambda_3} - \frac{E}{C+\lambda_2}\right) + \left(\frac{D}{A+\lambda_1} - \frac{D}{A+\lambda_4}\right)\left(\frac{D}{A+\lambda_3} - \frac{D}{A+\lambda_2}\right)$$

est identiquement nulle; elle s'écrit en effet :

$$(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3) \left[\frac{E^2}{(C+\lambda_1)(C+\lambda_2)(C+\lambda_3)(C+\lambda_4)} + \frac{D^2}{(A+\lambda_1)(A+\lambda_2)(A+\lambda_3)(A+\lambda_4)}\right]$$

ou $$(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3) \left[\frac{E^2}{\Psi(-C)} + \frac{D^2}{\Psi(-A)}\right],$$

mais $$\Psi(-A) = -4D^2(A-C),$$
$$\Psi(-C) = 4E^2(A-C).$$

L'expression précédente est donc nulle, et le théorème est démontré.

2. — Soient C_1, C_2, C_3, C_4 les quatre cercles directeurs de la cyclique. D'après le théorème précédent, le point p_1 centre de C_1 est le point de concours des hauteurs du triangle $p_2\, p_3\, p_4$; ce triangle est donc autopolaire par rapport au cercle C_1; par suite, la droite $p_3\, p_4$ est la polaire du point p_2, par rapport au cercle C_1.

On verrait, de la même façon, que cette même droite $p_3 p_4$ est la polaire du point p_1 par rapport au cercle C_2. Il en résulte que les deux cercles C_1 et C_2 ont pour axe radical la droite $p_3 p_4$. Donc :

Théorème. — *Les six droites qui joignent deux à deux les quatre pôles principaux sont les axes radicaux des quatre cercles directeurs.*

3. — On voit de plus que les deux cercles C_1 et C_2 sont orthogonaux, puisque leur axe radical p_3p_4 est la polaire du centre de chacun d'eux par rapport à l'autre; donc :

Théorème. — *Les quatre cercles directeurs d'une cyclique sont orthogonaux entre eux.*

Par suite, les douze points d'intersection des quatre cercles directeurs sont sur les six cercles décrits sur les segments qui joignent les pôles principaux, comme diamètres.

4. — Il est facile, d'après ce qu'on vient de voir, de calculer les rayons des cercles directeurs lorsqu'on donne les quatre pôles principaux.

Soient, en effet r_i et r_j les rayons de deux de ces cercles: on aura

$$r_i^2 + r_j^2 = \overline{p_ip_j}^2,$$

i et j pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3, 4.

De même :

$$r_i^2 + r_k^2 = \overline{p_ip_k}^2,$$
$$r_j^2 + r_k^2 = \overline{p_jp_k}^2,$$

k étant différent de i et j, et pouvant prendre aussi les valeurs 1, 2, 3, 4.

Donc

$$2r_i^2 = \overline{p_ip_j}^2 + \overline{p_ip_k}^2 - \overline{p_jp_k}^2,$$

ce qui donne la valeur de r_i.

5. — Considérons maintenant une des coniques focales; par exemple, celle F_1, qui correspond au pôle p_1,

$$\frac{4x^2}{A + \lambda_1} + \frac{4y^2}{C + \lambda_1} + 1 = 0,$$

et prenons la polaire du point p_2, par rapport à cette conique; elle aura pour équation :

$$-\frac{4Dx}{(A + \lambda_1)(A + \lambda_2)} - \frac{4Ey}{(C + \lambda_1)(C + \lambda_2)} + 1 = 0.$$

Je dis qu'elle passe au pôle p_3, c'est-à-dire que l'expression suivante est identiquement nulle :

$$\frac{4D^2}{(A + \lambda_1)(A + \lambda_2)(A + \lambda_3)} + \frac{4E^2}{(C + \lambda_1)(C + \lambda_2)(C + \lambda_3)} + 1.$$

En effet, on peut l'écrire ainsi :

$$\frac{4D^2(A + \lambda_4)}{\Psi(-A)} + \frac{4E^2(C + \lambda_4)}{\Psi(-C)} + 1,$$

et en remplaçant $\Psi(-A)$ et $\Psi(-C)$ par leurs valeurs trouvées plus haut, on trouve zéro.

On démontrerait, de la même façon, que cette polaire du pôle p_3 passe au point p_4. Donc la polaire du pôle p_2, par rapport à la conique focale F_1, est la droite p_3p_4. Ceci prouve que le triangle $p_2p_3p_4$ est autopolaire par rapport à la conique F_1; donc :

Théorème. — *Chacun des triangles formés par trois quelconques des pôles principaux est autopolaire par rapport à la conique focale correspondant au quatrième pôle.*

6. — Mais, d'après ce que l'on a vu plus haut, ce même triangle $p_2p_3p_4$ est autopolaire par rapport au cercle directeur C_1; donc les points de concours des sécantes communes à ce cercle et à la conique F_1 sont les points p_2, p_3 et p_4. De plus, les deux sécantes qui se coupent, par exemple, en p_2, forment un faisceau harmonique avec les droites p_2p_3 et p_2p_4. Or, les quatre points d'intersection de F_1 et de C_1 sont des foyers de la cyclique : on peut donc énoncer la propriété suivante :

Théorème. — *Si l'on joint deux à deux les quatre foyers d'une cyclique, situés sur l'un des cercles directeurs, les droites ainsi obtenues passent deux à deux par un des pôles principaux de la cyclique et forment un faisceau harmonique avec les deux droites qui joignent ce pôle aux deux pôles de la courbe, autres que celui qui est le centre du cercle directeur considéré.*

Il résulte de là que :

Théorème. — *Les foyers d'une cyclique sont douze à douze sur des droites concourant en un pôle principal de la courbe; ce pôle étant le centre du cercle directeur qui contient les quatre autres foyers.*

7. — La conique principale passant par les quatre pôles principaux, on peut, d'après ce qui précède, dire que :

Théorème. — *Le centre de la conique principale est sur le cercle des neuf points d'un quelconque des triangles formés par trois des quatre pôles principaux.*

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMEN

1. — *Former l'équation qui donne le faisceau des tangentes aux points où la conique* f = o *est rencontrée par la droite qui correspond à l'équation*

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Soient $P = 0$, $Q = 0$, les équations des tangentes considérées.

Les équations

$$PQ - (ux + vy + 1)^2 = 0, \qquad f = 0,$$

représentant la même conique, on a

$$PQ \equiv (ux + vy + 1)^2 + \lambda f.$$

Le discriminant de la forme

$$(ux + vy + 1)^2 + \lambda f,$$

égalé à zéro, donnera une équation du troisième degré en λ, admettant *deux racines nulles*, et une racine non nulle. A cette dernière correspond le couple dont nous cherchons l'équation.

Or, le discriminant en question étant

$$\begin{vmatrix} A\lambda + u^2, & B''\lambda + uv, & B'\lambda + u \\ B''\lambda + uv, & A'\lambda + v^2, & B\lambda + v \\ B'\lambda + u, & B\lambda + v, & A''\lambda + 1 \end{vmatrix},$$

on a, pour déterminer la racine non nulle,

$$\lambda \begin{vmatrix} B & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} + u \begin{vmatrix} u & B'' & B' \\ v & A' & B \\ 1 & B & A'' \end{vmatrix} + v \begin{vmatrix} A & u & B' \\ B'' & v & B \\ B' & 1 & A'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B'' & u \\ B'' & A' & v \\ B' & B & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou plus simplement,

$$\Delta\lambda - D = 0,$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & 1 \\ u & v & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Remarque. — Si la sécante considérée est la droite de l'infini ($u = 0$, $v = 0$), les tangentes demandées sont les asymptotes

de la conique. Dans ce cas, on a

$$D = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & 0 \\ B'' & A' & B & 0 \\ B' & B & A'' & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = B''^2 - AA' = -\delta,$$

et, par conséquent, $\Delta\lambda + \delta = 0.$

Le faisceau des asymptotes de la conique $f = 0$ est donc représenté par l'équation

$$f - \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

On retrouve ainsi le résultat connu (*Géom. an.*, p. 288).

2. — *Calculer* $tg\,\frac{a}{m}$ *en fonction de* $tg\,a$.

La formule

$$\operatorname{tg} a = \frac{m \operatorname{tg}\frac{a}{m} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\operatorname{tg}^3\frac{a}{m} + \ldots}{1 - \frac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{tg}^2\frac{a}{m} + \ldots}$$

conduit à une équation du degré m. On peut observer que si m est pair, *l'équation qui fait connaître* $tg\,\frac{a}{m}$ *peut être abaissée à une équation de degré moitié moindre.*

En effet, si l'on prend $AP_1 = \frac{a}{m}$, puis, dans le même sens,

$$P_1P_2 = P_2P_3 = \ldots = \frac{\pi}{m},$$

on inscrit, au cercle trigonométrique, un polygone régulier de $2m$ côtés, dont les diagonales coupent la tangente en A, en m points $R_1, R_2, \ldots R_m$ tels que $AR_1, AR_2, \ldots AR_m$ représentent les m racines cherchées. Or, si m est pair, ces diagonales sont deux à deux rectangulaires; par suite, les m racines en question sont telles que, groupées deux à deux, convenablement, leur produit est égal à -1.

D'après cette remarque, en posant

$$y = x - \frac{1}{x},$$

l'équation transformée ne sera plus que du degré $\frac{m}{2}$.

3. — *Soit* R *le résultant des équations*

$$ax^2 + 2bx + c = 0,$$
$$a'x^2 + 2b'x + c' = 0.$$

Démontrer que l'on a $R > 0$, *si l'une des équations a ses racires imaginaires.*

Cette conclusion subsiste, si les équations ont, l'une et l'autre, leurs racines imaginaires.

On sait que

$$R = (ac' - ca')^2 - 4(ab' - ba')(bc' - cb').$$

Par une transformation connue, R peut aussi se calculer par la formule

$$R = (2bb' - ac' - ca')^2 - 4(b^2 - ac)(b'^2 - a'c').$$

Sous cette forme, on voit d'abord qu'en supposant

$$b^2 - ac < 0, \qquad b'^2 - a'c' > 0,$$

on a

$$R > 0.$$

Mais supposons que $b^2 - ac$, $b'^2 - a'c'$ représentent des quantités négatives et posons

$$-b^2 + ac = h^2, \qquad -b'^2 + a'c' = h'^2,$$

d'où

$$a = \frac{b'^2 + h^2}{c}, \qquad a' = \frac{b'^2 + h'^2}{c'}.$$

On a

$$R = \left[b^2\frac{c'}{c} + b'^2\frac{c}{c'} - 2bb' + h^2\frac{c'}{c} + h'^2\frac{c}{c'}\right]^2 - 4h^2h'^2,$$

ou

$$c^2c'^2R = (bc' - cb')^4 + 2(h^2c'^2 + h'^2c^2)(bc' - cb')^2 + (h^2c'^2 - h'^2c^2)^2.$$

Sous cette forme, on voit que R est une quantité positive.

EXERCICE ÉCRIT

63. — On considère un angle $yox = \theta$ et un cercle Δ inscrit à cet angle. Une droite mobile δ, tangente à Δ, coupe les axes ox, oy aux points A, B.

Soit Γ la circonférence circonscrite au triangle AOB.

1° Trouver le lieu des centres de Γ. Ce lieu est une hyperbole ayant l'origine pour foyer.

2° Quel est le lieu du pôle de AB par rapport à Γ?

3° Trouver l'enveloppe des circonférences Γ.

4° Trouver le lieu du pôle de ox, par rapport à Γ. Ce lieu est une cubique unicursale.

Notes sur l'exercice 62.

Soit M' un point de coordonnées α', β'; menons les tangentes MA, MB, Les normales en A, B se coupent en M (α, β). De M, on peut mener à l'ellipse deux autres normales MC, MD. Les tangentes en C, D se coupent en M''(α'', β'').

Les droites MA, MB coupent Ox en deux points P, Q dont les abscisses sont les racines de l'équation

(1) $$x^2(a^2\beta'^2 + b^2\alpha'^2) - 2b^2c^2\alpha'x + c^4(b^2 - \beta'^2) = 0.$$

Les normales MC, MD coupent, de leur côté, l'axe Ox aux points R. S et les abscisses de ces points sont données par l'égalité

$$x^2(\alpha^2\beta''^2 + b^2\alpha''^2) - 2b^2c^2\alpha''x + c^4(b^2 - \beta''^2) = 0.$$

D'ailleurs, on sait que

$$\alpha'\alpha'' = -a^2, \qquad \beta'\beta'' = -b^2.$$

L'équation précédente devient alors

(2) $$x^2(a^2\beta'^2 + b^2\alpha'^2) + 2c^2\alpha'\beta'^2x + c^4\frac{\alpha'^2}{a^2}(\beta'^2 - b^2) = 0.$$

En écrivant que les racines des équations (1), (2) sont en relation harmonique, on a l'équation du lieu

$$(y^2 - b^2)(x^2 - a^2)(a^2y^2 + b^2x^2) + 2a^2b^2x^2y^2 = 0.$$

La courbe correspondante se construit facilement.

Nota. — Nous avons reçu une solution analogue de M. Delorme, soldat au 12e régiment d'artillerie.

M. Barisien nous a également envoyé une solution de cet exercice. M. Barisien fait suivre sa solution d'une remarque intéressante. Il déduit, du lieu trouvé, le lieu des points d'où partent quatre normales en relation harmonique. Ce lieu se trouve, comme on sait, directement et très simplement, en prenant l'équation

$$y = mx \pm \frac{c^2m}{\sqrt{a^2 + b^2m^2}},$$

et en écrivant que les racines de cette équation en m sont en relation harmonique. En prenant les formules qui lient les coordonnées du pôle normal à celles du pôle tangentiel, on peut toujours déduire, du lieu décrit par l'un de ces points, le lieu décrit par l'autre. Dans le cas présent, on doit effectuer une élimination assez délicate, M. Barisien montre comment elle peut être élégamment dirigée, et il aboutit, pour représenter le lieu de M, à l'équation

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 54\, a^2b^2c^4x^2y^2 = 0$$

SUR LA QUESTION 360 (*)

Par M. E. Catalan.

Pour plus de régularité, remplaçons n par y. Il s'agit, alors, de trouver les solutions *entières* des équations

$$2y^2 - 1 = x^2, \qquad 2y^2 + 1 = x^2;$$

(*) Cette question proposée par M. E. Lemoine dans le numéro de novembre dernier était ainsi énoncée :

ou

(1) $$x^2 - 2y^2 = +1,$$

(2) $$x^2 - 2y^2 = -1.$$

Celle-ci est vérifiée par $x = 1$, $y = 1$. Donc (**), les solutions de l'équation (1) sont données par les formules

$$x = \frac{(1+\sqrt{2})^{2k} + (1-\sqrt{2})^{2k}}{2},$$

$$y = \frac{(1+\sqrt{2})^{2k} - (1-\sqrt{2})^{2k}}{2\sqrt{2}};$$

et celles de l'équation (2), par les formules:

$$x = \frac{(1+\sqrt{2})^{2k+1} + (1-\sqrt{2})^{2k+1}}{2},$$

$$y = \frac{(1+\sqrt{2})^{2k+1} - (1-\sqrt{2})^{2k+1}}{2\sqrt{2}}.$$

Faisant $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ on trouve :

$y = n = 1, 2, 12, 70, \ldots$ *équation* (1),

$y = n = 1, 5, 29, 169, \ldots$ *équation* (2).

Remarques. I. — Si l'on fait

$$y_\lambda = \frac{(1+\sqrt{2})^\lambda - (1-\sqrt{2})^\lambda}{2\sqrt{2}},$$

on a cette loi de *récurrence* :

$$y_\lambda = 2y_{\lambda-1} + y_{\lambda-2}.$$

laquelle simplifie le calcul précédent.

II. — Les valeurs de x :

$$1, 3, 7, 17, 41, \ldots$$

satisfont à la même loi.

Donner explicitement toutes les valeurs entières de n *pour lesquelles*

1° $2n^2 - 1$ *est un carré parfait;*

2° $2n^2 + 1$ *est un carré parfait.*

Les équations indéterminées considérées dans cette question sont bien connues. La première représente un cas particulier de la fameuse équation de Pell

$$x^2 - ay^2 = 1.$$

Quant à l'équation $x^2 - ay^2 = -1$,
comme l'a observé Lagrange, sa résolution peut être ramenée à celle d'une équation de Pell.

On pourra consulter, à ce sujet, le *J. E.* 1884, p. 15. G. L.

(**) Legendre, *Théorie des nombres*, tome Ier, p. 56 et 57.

QUESTIONS PROPOSÉES

362. — Déterminer un triangle, connaissant les distances de l'orthocentre aux sommets (*). *(A. Droz.)*

363. — L'équation

$$a^p x^n + b^p x^{n-1} \ldots + l^p = 0,$$

dans laquelle p désigne un nombre entier; a, b, ... l, étant les termes consécutifs d'une progression arithmétique a, au plus, $p + 1$ racines réelles. *(Delens.)*

364. — Pour tout arc x, compris entre o et $\frac{\pi}{3}$, la différence $\operatorname{tg} x - x$, est comprise entre $\frac{x^3}{3}$ et x^3. *(Delens.)*

ERRATA du *J. S.* (Décembre).

Page 265 { *Ligne 4. Au lieu de* compare, *lire* compose.
— *4, en remontant. Au lieu de* $b\hbar$, *lire* by.

Page 266 { *Ligne 7. Au lieu de* l^{2iv_a}, *lire* e^{2iv_a}.
— *11. Au lieu de* position, *lire* positive.
— *14. Au lieu de* $l^{i(\pi-c)}$, *lire* $e^{i(\pi-c)}$.
— *20. Au lieu de* $\frac{\delta}{x}$ *lire* $\frac{\delta}{\alpha}$.
— *23. Au lieu de* forme *lire* formule.

Page 268 { *Ligne 1. Au lieu de* $\frac{\lambda}{d}$ *lire* $\frac{h}{d}$.
— *5. Ajouter* Donc.
— *20. Au lieu de* Σayz, *lire* $\frac{\Sigma ayz}{2S}$.

Page 270 { *Ligne 11. Au lieu de* , le *lire* du.
— *12. Au lieu de* O *lire* o.
— *1, en remontant. A rétablir ainsi :*
$= O\omega(O\omega - 2OQ) = O\omega^2 - 2O\omega.OQ.$

Page 271 { *Ligne 4. Au lieu de* $\frac{\rho^2}{\pi^2}$ *lire* $\frac{\rho^2}{R^2}$.

(*) On est conduit à une équation du troisième degré permettant de calculer les *cosinus* des angles du triangle; on propose de la discuter.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 27658-12-92.

SUR LES CYCLIQUES PLANES

Par M. F. Michel, lieutenant du Génie.

(*Suite*, voir page 15.)

IX. — Sur une Espèce particulière de Cycliques.

1. — L'équation générale des cycliques renferme huit paramètres arbitraires; il faut donc huit conditions pour déterminer une de ces courbes.

Or, une hyperbole équilatère est déterminée par quatre conditions; d'un autre côté, se donner le centre d'une cyclique équivaut à deux conditions.

Donc, les cycliques ayant même centre et même conique principale renfermeront, dans leur équation générale, deux constantes arbitraires.

D'après cela, l'équation générale des cycliques ayant l'origine pour centre, et pour conique principale l'hyperbole représentée par

$$(C - A)xy + Ex - Dy = 0,$$

sera

$$(x^2 + y^2)^2 + (A + K)x^2 + (C + K)y^2 + 2Dx + 2Ey + h = 0,$$

où K et h sont arbitraires.

2. — Si l'on cherche l'intersection de ces cycliques par une droite de direction constante, on voit que, quels que soient K et h, son diamètre a pour équation

$$x + my = 0.$$

Théorème. — *Si, dans des cycliques ayant même centre et même conique principale, on considère les diamètres d'une direction fixe, ces diamètres coïncident.*

3. — Cherchons l'intersection de deux cycliques ayant même centre et même conique principale, dont les équations sont

$$(x^2 + y^2)^2 + (A + K)x^2 + (C + K)y^2 + 2Dx + 2Ey + h = 0,$$
$$(x^2 + y^2)^2 + (A + K')x^2 + (C + K')y^2 + 2Dx + 2Ey + h' = 0.$$

Si l'on retranche membre à membre, on retrouve

$$(K - K')(x^2 + y') + h - h' = 0.$$

Donc :

Théorème. — *Deux cycliques ayant même centre et même conique principale se coupent sur un cercle de même centre qu'elles.*

Inversement, considérons une cyclique S :

$$(x^2 + y^2)^2 + Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

et un cercle concentrique : $K(x^2 + y^2) + h = 0$.

L'équation générale des cycliques passant à l'intersection de ces deux courbes sera

$$(x^2 + y^2)^2 + (A + K)x^2 + (C + K)y^2 + 2Dx + 2Ey + F + h = 0.$$

Donc :

Théorème. — *Les cycliques qui coupent une cyclique* S, *en quatre points situés sur un cercle concentrique à cette courbe, ont même centre et même conique principale que* S.

4. — Les coniques inscrites à une série de cycliques ayant même centre et même conique principale, ont pour équation générale

$$-\mu^2 - 2\mu(x^2 + y^2) + (A + K)x^2 + (C + K)y^2 + 2Dx + 2Ey + h = 0.$$

Cette équation renferme trois constantes arbitraires μ, K et h.

D'après ce que l'on a vu précédemment, le centre (α, β) d'une de ces coniques sera donné par les relations

$$\alpha = -\frac{D}{A + K - 2\mu}, \qquad \beta = -\frac{E}{C + K - 2\mu}.$$

On en déduit

$$A + K = 2\mu - \frac{D}{\alpha}, \qquad C + K = 2\mu - \frac{E}{\beta};$$

et l'équation précédente devient :

$$-\mu^2 - \frac{D}{\alpha}x^2 - \frac{E}{\beta}y^2 + 2Dx + 2Ey + h = 0.$$

Les termes du deuxième degré ont des coefficients constants, lorsque α et β le sont ; donc :

Théorème. — ***Les coniques inscrites à des cycliques ayant même centre et même conique principale, et qui ont pour centre un point donné de cette conique principale, sont homothétiques.***

X. — Détermination des cycliques.

1° Une cyclique est déterminée, si l'on se donne un des cercles directeurs et la conique focale correspondante.

Car, alors, la cyclique est l'enveloppe des cercles ayant leur centre sur cette conique, et qui coupent orthogonalement le cercle directeur donné.

2° Une cyclique est déterminée, si l'on se donne une des coniques Γ inscrites, ses quatre points de contact avec la courbe, et un point a de cette courbe.

En effet, si l'on mène par a une tangente à la conique Γ, et si l'on désigne par m le point de contact, le point b de cette tangente, tel que le rectangle de ma par mb est égal à la puissance du point m par rapport au cercle de contact de la conique Γ, appartiendra à la cyclique (V). Si l'on répète, pour le point b, la même construction que pour a, on aura un nouveau point de la cyclique et ainsi de suite. Celle-ci est donc déterminée, point par point.

Il est d'ailleurs facile de voir que les données correspondent à huit conditions.

3° Une cyclique est déterminée quand on se donne les quatre pôles principaux et le centre. Chacun des pôles équivaut à deux conditions; mais, d'après ce qui précède, chacun de ces points est une conséquence des trois autres (VIII); donc les quatre pôles n'équivalent qu'à six conditions. Le centre équivaut à deux conditions. On a donc en tout huit conditions.

On pourra avoir immédiatement les rayons des cercles directeurs (VIII). Et la conique focale correspondant à l'un des pôles principaux p, sera la conique ayant pour centre le centre donné de la cyclique, et par rapport à laquelle le triangle $p_2 p_3 p_4$ est autopolaire; elle est donc déterminée, et par suite aussi la cyclique. *(A suivre.)*

NOTE SUR L'ELLIPSE DE LONGCHAMPS (*)

Par M. **E. Catalan.**

Mon collègue et ami vient de publier une nouvelle édition du *Supplément* à son *Cours de mathématiques.* A la page 184 de ce volume, on lit :

Il existe une conique, bien déterminée (nous la désignons par I), *ayant pour centre le point de concours des bissectrices intérieures du triangle de référence* ABC, *et passant, en outre, par les pieds* S, S', S'' *de ces bissectrices.*

. . . .

La conique I *est doublement tangente au cercle inscrit, aux extrémités de son petit axe.*

... — *Le* grand *axe est une moyenne géométrique entre le rayon du cercle inscrit et le demi-rayon du cercle circonscrit* (**).

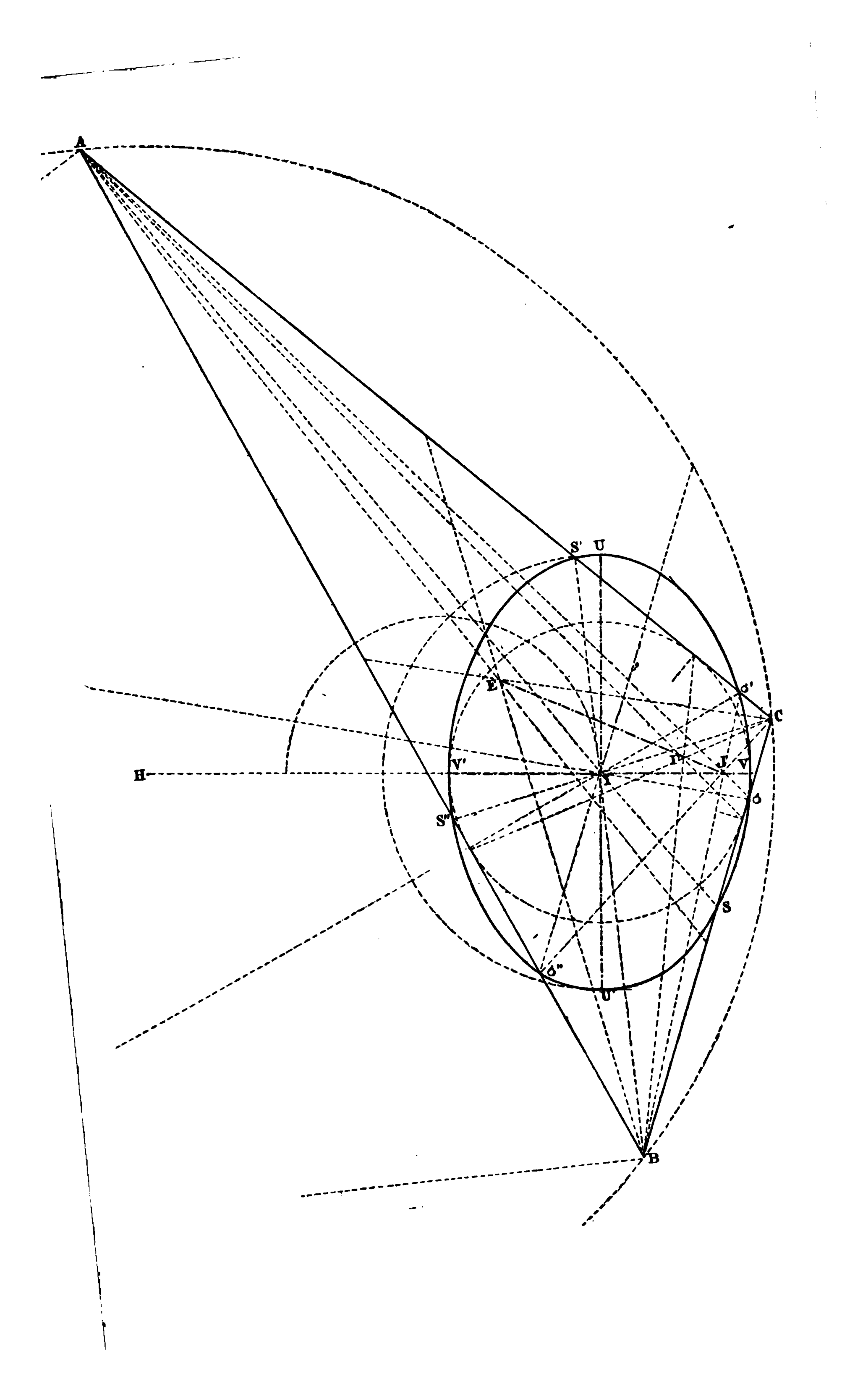
D'après cet énoncé, la conique I est celle que M. de Longchamps a fait connaître au Congrès de Nancy, en 1886 : depuis cette époque, elle est connue sous le nom d' *ellipse de Longchamps.* Dans le compte-rendu de ce Congrès, on lit, p. 72 : *les* demi-*axes de la conique sont : 1° le rayon* r *du cercle inscrit; 2° une moyenne géométrique entre* r *et le demi-rayon,* $\frac{R}{2}$, *du cercle circonscrit* (***).

Les théorèmes trouvés par M. de Longchamps sont fort remarquables; mais, comme je le lui ai écrit, il n'y a pas longtemps, on peut les *compléter.* Cette recherche est l'objet des lignes suivantes.

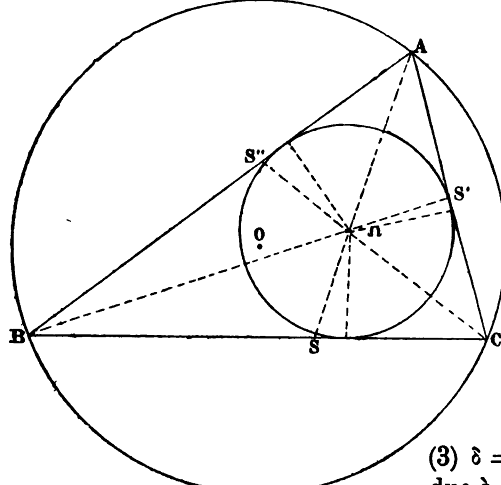
(*) La figure ci-jointe reproduit les constructions qui font connaître les axes de cette ellipse, et elle indique quelques-unes des propriétés que nous avions signalées dans la Note à laquelle fait ici allusion M. Catalan.
G. L.

(**) On va voir que cette valeur est erronée; il faut lire le *demi-grand* axe et non le *grand* axe.

(***) Voir le renvoi ci-dessus.


A
S'
U
E
C
H
V'
I
J
V
S"
σ
S
σ"
U'
B
σ'

I. D'après l'énoncé contenu dans le *Supplément*, l'ellipse I est concentrique au cercle Ω, inscrit au triangle ABC.



II. Soient A, B les demi-axes :

(1) $A = \sqrt{r \frac{R}{2}}$,

(2) $B = r$.

III. Le triangle ABC étant *inscrit* au cercle O, et *circonscrit* au cercle Ω, la distance $O\Omega = \delta$, est donnée par la formule

(3) $\delta = \sqrt{R(R - 2r)}$, (*), due à Euler.

IV. D'après le théorème d'Euler, généralisé par Poncelet, *si les cercles* O,Ω *sont donnés, ainsi que le triangle* ABC, il y a une infinité de triangles A'B'C', jouissant des mêmes propriétés que ABC. A chacun d'eux, correspond une ellipse I', égale à l'ellipse I.

V. Des équations (1), (2), (3) on tire :

(4) $$r = B,$$

(5) $$x = \frac{2A^2}{B},$$

(6) $$\delta = \frac{2A}{B}\sqrt{A^2 - B^2}.$$

Donc, *si l'ellipse* I *est donnée, il en est de même du cercle* Ω*; et, quant au cercle* O, *le lieu de son centre est une circonférence décrite de* Ω *comme centre, avec* δ *pour rayon. A chaque position du cercle* O, *correspondent un triangle* ABC, *et trois points* S, S', S'' *de l'ellipse* I. Conséquemment, celle-ci admet *trois infinités* de points remarquables, faciles à construire.

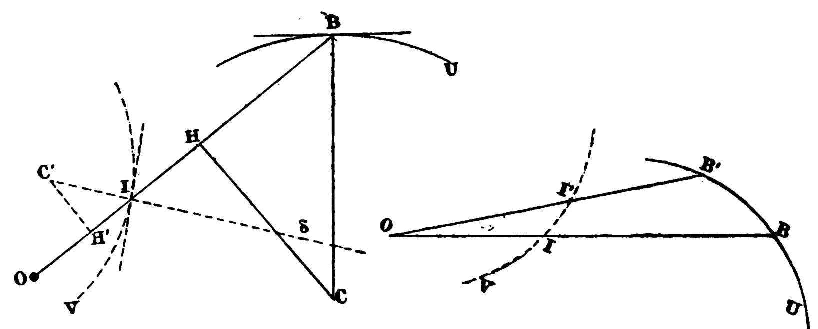
(*) Voyez *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, sixième édition, p. 142.

SUR LA CONSTRUCTION DES TANGENTES
AUX COURBES

(*Suite*, voir p. 11.)

3. — La considération de la circonférence qui passe par deux points I, I', infiniment voisins sur une courbe V et par un point fixe O, peut être utilisée dans plusieurs autres circonstances. Nous signalerons encore l'application suivante.

Imaginons une courbe U ; O désignant un point fixe, supposons que, au point B, on fasse correspondre, d'après une loi déterminée, un point I sur OB ; c'est le cas des *transformations centrales*, au sens le plus général de ce mot.



En considérant les circonférences OII', OBB', on a, en désignant par ρ, ρ' leurs rayons :

$$\frac{II'}{\sin O} = 2\rho , \qquad \frac{BB'}{\sin O} = 2\rho' ;$$

et, à la limite,

$$\lim \frac{\rho}{\rho'} = \lim \frac{II'}{BB'} .$$

Si l'on peut déterminer la limite du rapport des infiniment petits II', BB', en désignant cette limite par k, on sera conduit, par cette considération, à la construction suivante :

En B, menons la normale à la courbe proposée U ; cette droite rencontre, en C, la perpendiculaire élevée au milieu de

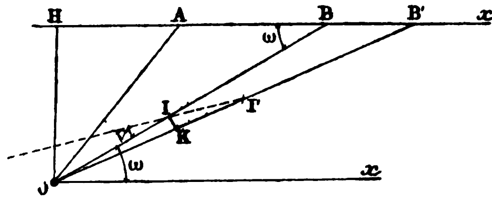
OB. Soit δ la normale en I, à la courbe V, droite que nous nous proposons de construire et qui rencontre, en C′, la perpendiculaire élevée au milieu de OI. Alors BC représente la limite de ρ; BC′ celle de ρ. Nous avons donc

$$\frac{BC'}{BC} = \lim \frac{\rho}{\rho'} = k.$$

Cette égalité fait connaître BC′ quand BC et k sont déterminés ; BC′ étant connu, le point C′ pourra être construit. On devra seulement, par une discussion convenablement faite sur chaque exemple, voir si le point C′ est situé à la gauche ou à la droite du vecteur OB.

4. — Voici une application du principe précédent.

Soit OAx' un angle donné; nous le supposerons égal à $\frac{3\pi}{4}$, pour simplifier un peu. Par le point O, point fixe donné, menons la transversale mobile OB, et prenons OI = AB. Le lieu du point I est une courbe Γ, dont l'équation polaire rapportée à l'axe Ox, droite parallèle à Ax', est



$$\rho = a \cot g\, \omega - a,$$

a désignant la longueur OH, distance du point O à la droite Ax.

Avec les notations adoptées dans le paragraphe précédent, nous avons

$$\frac{II'}{BB'} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

D'ailleurs, des égalités :

$$OI = AB, \qquad OI' = AB',$$

on déduit

$$OI' - OI = BB'.$$

De O, comme centre, avec OI pour rayon, décrivons l'arc IK, et posons OI′I = V. Nous avons

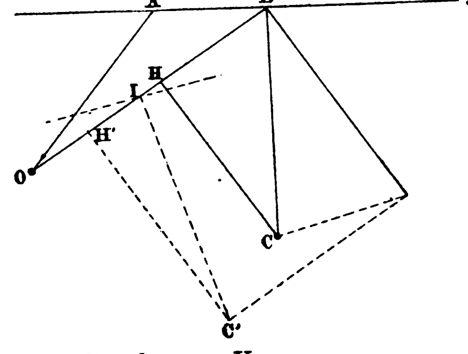
$$KI' = OI' - OI = II' \cos V;$$

puis

$$BB' = II' \cos V.$$

On trouve ainsi $\lim \frac{\rho}{\rho'} = \lim \frac{1}{\cos V}$.

La limite de ρ' est la droite BC obtenue en élevant une perpendiculaire au milieu de OB, jusqu'au point C où elle rencontre la perpendiculaire élevée en B, à Ax. On a donc $\lim \rho \cos V = BC$.



Soit IC' la normale, en I, à la courbe Γ.

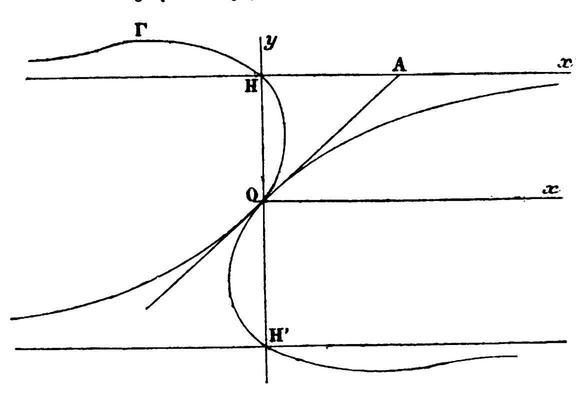
La perpendiculaire élevée, à OI, en son milieu H', rencontre cette normale en C'. On a IC' = lim ρ, et IC'H' = lim de V;

par conséquent IC' = lim de $\rho \cos V$.

Finalement IC' = BC. Le point inconnu C' se déduit donc du point C par une construction très simple, suffisamment indiquée sur la figure.

Rapportée aux axes ox, oy, la courbe Γ a pour équation

$$y^2(x^2 + y^2) = a^2(y - x)^2.$$



En utilisant cette équation, ou en se servant de l'équation polaire de la courbe, donnée plus haut, on discute facilement

la forme de la courbe; cette forme est indiquée par la figure ci-dessus.

La courbe que nous venons de considérer est une conchoïde par rapport à celle qui correspond à l'équation polaire

$$\rho = a \operatorname{cotg} \omega. \quad (*)$$

G. L.

SUR LE DÉPLACEMENT
D'UNE FIGURE PLANE (COORDONNÉES TANGENTIELLES)

par M. **Balitrand,** ancien élève de l'Ecole Polytechnique.

I.— Précédemment, (**) nous avons considéré le déplacement d'une figure plane, de forme invariable, au point de vue ponctuel; c'est-à-dire que nous avons étudié les trajectoires des différents points de la figure. On peut aussi considérer le déplacement au point de vue tangentiel; c'est-à-dire étudier es courbes enveloppées par les différentes droites de la figure. Dans ce qui suit, nous avons surtout pour but d'établir les formules qui permettent de développer les coordonnées d'une droite en séries procédant suivant les puissances du paramètre qui règle le déplacement de la figure. A cet effet, nous emploierons deux systèmes de coordonnées. Dans le premier (coordonnées normales) une droite est déterminée par les inverses des segments qu'elle détermine sur deux axes rectangulaires. Dans le second, une droite est définie par sa distance à un point fixe o, et par l'angle qu'elle fait avec l'axe oy; c'est-à-dire par l'angle que fait avec ox la perpendiculaire abaissée de o sur la droite. Nous appellerons ces coordonnées (p, φ), coordonnées polaires. Elles rappellent, en effet, les coordonnées polaires ordinaires, où un point est défini par sa distance à un point fixe o et par l'angle que

(*) A propos de cette dernière, on pourra consulter 1° les *Nouvelles Annales* 1864, p. 41; 2° le *Journal* 1887, p. 353; et 1890. p. 273. Connaissant la tangente en un point de la courbe (1), on pourra en déduire le tracé de la tangente à Γ, par application du principe des transversales réciproques. Mais un tracé direct, tel que celui que nous venons d'indiquer, est préférable. *G. L.*

(**) Voyez : *Journal* 1892, page 121, 159.

fait son rayon vecteur avec ox. Elles permettent, soit d'établir plus rapidement certaines formules, soit d'écrire plus simplement certaines expressions. D'ailleurs, on passe immédiatement des coordonnées normales aux coordonnées polaires, par les formules

$$(1) \qquad u = \frac{\cos \varphi}{p}, \qquad v = \frac{\sin \varphi}{p};$$

et, inversement, l'on passe des coordonnées polaires aux coordonnées normales, au moyen des formules

$$(2) \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{u}, \qquad p = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

On peut rapprocher ces formules de celles qui permettent d'exprimer les coordonnées rectangulaires (x, y) en fonction des coordonnées polaires, et réciproquement :

$$x = r \cos \theta, \qquad y = r \sin \theta,$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Avant de commencer l'étude du déplacement proprement dit, il nous faut établir certaines formules, en coordonnées tangentielles, qui peuvent servir d'ailleurs dans d'autres cas; car on rencontre très fréquemment des questions où l'équation tangentielle d'une courbe résulte immédiatement des données de la question, ou s'en déduit par des calculs fort simples; tandis qu'il serait peu commode d'obtenir l'équation ponctuelle de la courbe. Il importe donc d'avoir des formules qui permettent d'étudier les propriétés d'une courbe, sur son équation tangentielle.

II. *Notations.* — Soient u et v les coordonnées normales d'une droite Δ;

Soient φ et p les coordonnées polaires de Δ;

Soient x et y les coordonnées du point M où la droite Δ touche son enveloppe;

Soit ds l'élément de la courbe enveloppe;

Soit ε l'angle de deux positions infiniment voisines de Δ, c'est-à-dire l'angle de contingence de la courbe au point M.

Soit ρ le rayon de courbure au point M.

Soient (u, v), $(u + du,\ v + dv)$ deux positions infiniment voisines de la droite Δ.

Les coordonnées du point M sont déterminées par les deux équations

$$ux + vy - 1 = 0,$$
$$(u + du)x + (v + dv)y - 1 = 0$$

ou par les équations équivalentes

$$ux + vy - 1 = 0,$$
$$xdu + ydv = 0.$$

On tire de ces équations

$$(3) \qquad x = \frac{-dv}{udv - vdu}, \qquad y = \frac{-du}{udv - vdu}.$$

On a alors

$$(4) \quad dx = \frac{v(dvd^2u - dud^2v)}{(udv - vdu)^2}, \qquad dy = -\frac{u(dvd^2u - dud^2v)}{(udv - vdu)^2}$$

et par suite

$$(5) \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{(dvd^2u - dud^2v)\sqrt{u^2 + v^2}}{(udv - vdu)^2}.$$

Calculons maintenant l'angle ε. On a

$$\varepsilon = \sin \varepsilon = \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2},$$

d'ailleurs

$$(6) \qquad \rho = \frac{ds}{\varepsilon} = \frac{(dvd^2u - dud^2v)(u^2v^2)^{\frac{3}{2}}}{(udv - vdu)^3}.$$

Coordonnées polaires. — Des formules

$$u = \frac{\cos \varphi}{p}, \qquad v = \frac{\sin \varphi}{p},$$

on tire, en prenant φ pour variable indépendante :

$$(7) \quad u' = -\frac{p \sin \varphi + p' \cos \varphi}{p^2}, \qquad v' = \frac{p \cos \varphi - p' \sin \varphi}{p^2};$$

puis :

$$(8) \quad \begin{cases} u'' = -\dfrac{(p^2 + pp'' - 2p'^2) \cos \varphi - 2pp' \sin \varphi}{p^3}, \\ v'' = -\dfrac{(p^2 + pp'' - 2p'^2) \sin \varphi + 2pp' \cos \varphi}{p^3}, \end{cases}$$

On a donc :

$$uv' - vu' = \frac{1}{p^2},$$
$$v'u'' - u'v'' = -\frac{(p + p'')}{p^3},$$
$$\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{1}{p}.$$

Par suite, l'on arrive aux formules très simples :

$$(9) \qquad \rho = -(p + p''),$$

$$(10) \qquad ds = \rho\varepsilon = -(p + p'')d\varphi.$$

Enfin, les expressions (3) donnent :

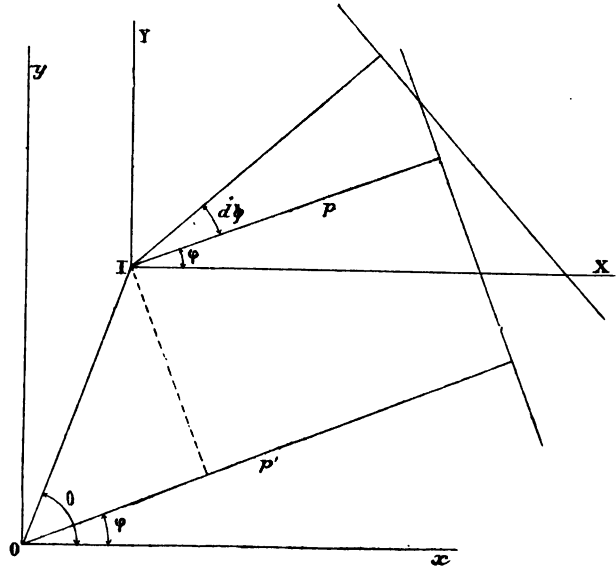
$$(11) \qquad \begin{cases} x = p\cos\varphi - p'\sin\varphi; \\ y = p\sin\varphi + p'\cos\varphi, \end{cases}$$

puis

$$(12) \qquad \begin{cases} x' = -(p + p'')\sin\varphi = \rho\sin\varphi, \\ y' = (p + p'')\cos\varphi = -\rho\cos\varphi. \end{cases}$$

III. — Revenons maintenant au problème principal, c'est-à-dire à l'établissement des formules qui permettent de développer u et v en séries.

Soient ox et oy deux axes rectangulaires quelconques; α et β les coordonnées rectangulaires du centre instantané de



rotation I; r et θ ses coordonnées polaires. Soient u_1 et v_1 les coordonnées normales d'une droite, par rapport à ox et oy; p_1 et φ ses coordonnées polaires.

Soient enfin u et v les coordonnées normales de la droite

par rapport à IX et IY, P et φ ses coordonnées polaires.

Prenons φ comme variable indépendante, et observons que, pour un déplacement infiniment petit de la droite, p est constant; puisque ce déplacement est une rotation infiniment petite autour du point I. Cela posé, on a évidemment:

$$p_1 = p + r\cos(\theta - \varphi) = p + \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi;$$

puis :

$$p_1' = p' + \alpha'\cos\varphi + \beta'\sin\varphi - \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi,$$

$$p_1'' = p'' + \alpha''\cos\varphi + \beta''\sin\varphi - 2\alpha'\sin\varphi + 2\beta'\cos\varphi - \alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi,$$

. . . .

On a ensuite, d'après les formules (1) :

$$u_1 = \frac{\cos\varphi}{p_1}, \qquad v_1 = \frac{\sin\varphi}{p_1};$$

d'où

$$u_1' = -v_1 - u_1\frac{p_1'}{p_1},$$

$$v_1' = u_1 - v_1\frac{p_1'}{p_1},$$

puis

$$u_1'' = -u_1 + 2v_1\frac{p_1'}{p_1} + 2u_1\frac{p_1'^2}{p_1} - u_1\frac{p_1''}{p_1},$$

$$v_1'' = -v_1 - 2u_1\frac{p_1'}{p_1} + 2v_1\frac{p_1'^2}{p_1} - v_1\frac{p_1''}{p_1}.$$

Prenons maintenant pour origine le centre instantané de rotation I, de sorte que $\alpha = 0$, $\beta = 0$; et choisissons la direction de l'axe Ox de sorte que $\alpha' = 0$. Alors u, v, u', v', u'', v''.., et les formules précédentes donnent, en se souvenant que $p' = 0$ $p'' = 0$,

$$p_1 = p,$$
$$p_1' = \beta'\sin\varphi,$$
$$p_1'' = \alpha''\cos\varphi + \beta''\sin\varphi + 2\beta'\cos\varphi,$$

. . . .

puis

$$u' = -v - 2\beta' uv,$$
$$v' = u - \beta' v^2,$$
$$u'' = -u + 2\beta' v^2(1 + \beta' u) - u(\alpha'' u + \beta'' v + 2\beta' u),$$
$$v'' = -v - 2\beta' uv + 2\beta' v^3 - v(\alpha'' u + \beta'' v + 2\beta' u),$$

. . . .

La formule de Mac-Laurin donne alors :

$$U = u - (v + 2\beta' uv)\varphi - [u - 2\beta' v^2(1 + \beta' u) + u(\alpha'' u + \beta'' v + 2\beta' u)]\frac{\varphi^2}{1.2} + \dots$$

$$V = v + (u - \beta' v^2)\varphi - [v + 2\beta' uv - 2\beta' v^3 + v(\alpha'' u + \beta'' v + 2\beta' u)]\frac{\varphi^2}{1.2} + \dots$$

Ce sont les formules que nous voulions établir.

SUR LES TRIANGLES AUTOPOLAIRES

Par M. **A. Noyer**, élève au Collège Chaptal.

Si l'on considère une conique S, un triangle ABC et le triangle $\alpha\beta\gamma$, tel que α, β, γ, soient respectivement les pôles des droites CB, AC, BA, les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes.

Supposons que le triangle ABC soit fixe, et faisons varier la conique S; les points α, β, γ décriront certaines courbes Σ_1, Σ_2, Σ_3; et, si les points α, β, γ viennent coincider respectivement avec A, B, C, c'est-à-dire, si le triangle ABC devient autopolaire relativement à une des coniques S_1 du système, les tangentes aux courbes Σ_1, Σ_2, Σ_3 aux points A, B, C, sont concourantes.

De cette remarque on peut déduire, comme nous allons le montrer, quelques propriétés du triangle autopolaire.

1° Problème. — *Lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à un système de coniques ayant deux diamètres conjugués donnés en position et dont le produit des longueurs est constant.*

Je choisis comme axes de coordonnées les deux diamètres donnés.

$$(1) \qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0$$

est l'équation générale des coniques du système, A et B vérifiant la relation $AB = a^2b^2$. L'équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

représente une des coniques du système. Soient α, β, les coordonnées du pôle de la droite fixe par rapport à la conique

(2); l'équation de cette droite donnée sera:

$$(3) \qquad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0.$$

Les coordonnées x_1, y_1 du pôle de la droite (3) par rapport à la conique (1), sont:

$$x_1 = \frac{A\alpha}{a^2}, \qquad y_1 = \frac{B\beta}{b^2};$$

d'où

$$A = \frac{a^2x_1}{\alpha}, \qquad B = \frac{b^2y_1}{\beta};$$

or

$$AB = a^2b^2 = \frac{x_1y_1}{\alpha\beta}a^2b^2;$$

ainsi

$$x_1y_1 = \alpha\beta.$$

Le lieu cherché est donc une hyperbole.

Cela posé, soient $\alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ les coordonnées de deux points qui forment avec le point $\alpha\beta$ un triangle autopolaire relativement à la conique (2). D'après ce qui a été dit, les tangentes menées en ces trois points respectivement aux hyperboles représentées par

$$xy = \alpha\beta, \qquad xy = \alpha'\beta', \qquad xy = \alpha''\beta'',$$

sont concourantes.

On a donc le théorème suivant:

Théorème. — *Les tangentes, menées par les trois sommets d'un triangle autopolaire, aux hyperboles passant par ces sommets, et dont les asymptotes sont deux diamètres conjugués de la conique, sont concourantes.*

On peut remarquer que le point de concours de ces tangentes décrit une conique quand les deux diamètres varient; un système de deux de ces trois tangentes constitue en effet un faisceau homographique.

2. — Transformons le théorème précédent par polaires réciproques, en prenant comme base la conique considérée. Le triangle autopolaire se transforme en lui-même; l'hyperbole correspondant à l'équation $xy = \alpha\beta$ a pour transformée une hyperbole ayant les mêmes asymptotes et, de plus, tangente au côté du triangle autopolaire opposé au sommet $\alpha\beta$. Les trois tangentes précédentes deviennent les points de contact, milieux des segments déterminés, sur les

côtés du triangle autopolaire, par les diamètres conjugués. Ainsi :

Théorème. — *Les milieux des segments déterminés par deux diamètres conjugués d'une conique, sur les côtés d'un triangle autopolaire, relativement à cette conique, sont trois points en ligne droite.*

Cette droite enveloppe d'ailleurs une conique quand les deux diamètres conjugués varient.

Du reste, chaque côté du triangle autopolaire est la direction conjuguée du diamètre qui passe par le sommet opposé.

D'après cela, on peut donner à l'énoncé précédent une forme plus générale, en disant :

Théorème. — *Lorsqu'un triangle est, par rapport à un faisceau involutif, tel que chacun de ses côtés est parallèle au rayon conjugué du rayon qui passe par le sommet opposé, les milieux des segments déterminés par le faisceau, sur les côtés du triangle, sont en ligne droite.*

3. Cas particulier. — Si nous considérons un triangle quelconque, les théorèmes précédents, dans lesquels on substitue, aux deux diamètres conjugués, deux droites rectangulaires passant par l'orthocentre du triangle proposé, s'appliquent. Il suffit de considérer le cercle, par rapport auquel le triangle est autopolaire, comme faisant partie du système de coniques dont le produit des longueurs des axes est constant. Par exemple, on a la proposition suivante :

Théorème. — *Les côtés d'un angle droit, qui a son sommet à l'orthocentre d'un triangle, déterminent, sur les côtés de ce triangle, des segments dont les milieux sont en ligne droite.*

4. Problème. — *Lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à une conique qui se déplace parallèlement à elle-même, de façon que son centre décrive une droite.*

Choisissons comme axe des y, la droite décrite par le centre ; l'axe des x sera le diamètre conjugué de cette droite dans une des coniques du système. L'équation de cette conique est donc

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

L'équation générale des coniques du système sera :

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-\lambda)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

dans laquelle λ est un paramètre variable. Soient α, β les coordonnées du pôle de la droite fixe par rapport à la conique (1); la droite fixe aura alors pour équation :

$$(3) \qquad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0.$$

Exprimant que x_1, y_1 sont les coordonnées du pôle de cette droite, par rapport à la conique (2), il vient :

$$\frac{x_1}{\alpha} = \frac{y_1 - \lambda}{\beta} = \frac{\lambda(y_1 - \lambda)}{b^2} + 1.$$

Lorsque λ varie, $x_1 y_1$ décrit l'hyperbole dont l'équation est

$$\beta^2 x^2 - \alpha\beta xy + b^2\alpha x - b^2\alpha^2 = 0,$$

qui est le lieu cherché. Cette hyperbole a pour centre le point où la polaire de $\alpha. \beta$ par rapport à la conique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

coupe l'axe des y. Les asymptotes sont l'axe des y et la parallèle menée par le centre au diamètre conjugué de la droite fixe donnée, c'est-à-dire une parallèle à la droite joignant l'origine au point α, β.

Cela posé, si α', β', α'', β'' sont les coordonnées de deux points qui forment avec le point α, β un triangle autopolaire, les tangentes menées en ces trois points respectivement aux trois hyperboles telles que

$$\beta^2 x^2 - \alpha\beta xy + b^2\alpha x - b^2\alpha^2 = 0,$$

sont concourantes.

Chacune de ces tangentes coupe l'axe des y en un point qui est le symétrique par rapport à l'origine du centre de l'hyperbole correspondante; on a donc la proposition suivante :

Théorème. — ABC *étant un triangle autopolaire par rapport à une conique ;* α, β, γ *les points où* BC, AC, AB *coupent respectivement l'un des diamètres de la conique, et* α', β', γ' *les symétriques de* α, β, γ *par rapport au centre, les droites* $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ *sont concourantes.*

5. Cas particulier. — Si la conique précédente est un cercle, le théorème précédent, dans lequel on substitue au centre de la conique, l'orthocentre du triangle, subsiste. Mais on peut simplifier l'énoncé de la manière suivante: soit ABC un triangle dont H désigne l'orthocentre; soit A'B'C' le triangle symétrique de ABC par rapport au point H; une droite quelconque menée par H coupe BC en α et B'C' en α' symétrique de α par rapport à H, cette droite coupe AC en β, A'C' en β', AB en γ, A'B' en γ'. Et $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ sont concourantes d'après le théorème précédent, A, B, C étant les symétriques des sommets A', B', C' du triangle A'B'C' par rapport à son orthocentre. Du reste, en projetant la figure sur un plan quelconque, on voit que le théorème est vrai quel que soit le point H. On a donc le théorème suivant:

Théorème. — *Étant donnés un triangle* A, B, C, *un point* P *dans son plan et une droite* D *quelconque passant par* P *qui coupe les côtés* AB, BC, CA *du triangle respectivement en* γ, α, β; A', B', C' *étant les symétriques de* A, B, C *par rapport à* P, *les trois droites* $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ *sont concourantes.*

Le point de concours de ces droites décrit une conique Γ quand la droite D tourne autour du point P (faisceaux homographiques).

On peut observer que Γ passe par les points A, B, C, et aussi par A', B', C'. On voit aisément, en effet, que A'C' coupe AB en un point λ, et que A'B' coupe AC en un point μ, et tels que λ, P, μ soient sur une droite. Il en résulte que le point P, milieu des segments AA', BB', CC', est le centre de la conique. Lorsque P est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, le lieu du point de concours des droites définies précédemment est le cercle circonscrit au triangle.

Si nous transformons cette dernière partie par polaires réciproques en prenant comme base le cercle circonscrit au triangle, on a l'énoncé suivant:

Théorème.—A', B', C' *étant les symétriques des sommets* A, B, C *d'un triangle, par rapport au centre du cercle inscrit, si par* A', B', C' *on mène trois droites parallèles coupant respectivement* BC, AC, AB

en α, β, γ, *les trois points* α, β, γ *sont sur une ligne droite tangente au cercle inscrit dans le triangle.*

Ce théorème s'applique à l'ellipse en projetant cylindriquement.

6. *Remarque.* — En transformant par polaires réciproques le premier théorème de la deuxième application (page 0), on a un théorème peu intéressant en lui-même, mais qui, transformé par projection, de façon que la conique de base devienne une parabole, donne la proposition suivante :

Théorème. — ABC *étant un triangle autopolaire relativement à une parabole,* A′, B′, C′ *étant les symétriques de* A, B, C *par rapport à un diamètre quelconque de cette parabole, les diamètres passant par* A′, B′, C′ *coupent respectivement les côtés* BC, AC, AB *du triangle autopolaire, en trois points qui sont en ligne droite.*

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin.**

249. — *Soient* M *un point du plan du triangle,* $A_1B_1C_1$, *son triangle podaire;* B_1C_1 *rencontre* BC *en* A_2, *etc. Le lieu des points* M, *tels que* A_2, B_2, C_2 *soient en ligne droite, est la cubique des inverses, relative à l'anticomplémentaire de l'orthocentre.*

x_1, y_1, z_1, étant les coordonnées normales de M, posons pour abréger

$$y' = y_1 + x_1 \cos C \qquad z' = z_1 + x_1 \cos B$$
$$z'' = z_1 + y_1 \cos A \qquad x'' = x_1 + y_1 \cos C$$
$$x''' = x_1 + z_1 \cos B \qquad y''' = y_1 + z_1 \cos A$$

on trouve, pour les coordonnées de A_2 :

$$x = 0 \qquad \frac{y}{x''y'''} = \frac{z}{-z''x'''}$$

formules analogues pour B_2, C_2; si on exprime que ces points sont en ligne droite, on a :

$$\begin{vmatrix} 0 & x''y''' & -z''x''' \\ y'x''' & 0 & -z'y''' \\ z'x'' & -y'z'' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

(1) $$z'x''y''' = y'z''x'''$$

qui est l'équation de la cubique des inverses relative à l'anticomplémentaire de l'orthocentre.

Ceci pouvait-être prévu; car, d'après des résultats connus, (1) exprime déjà que le triangle $A_1B_1C_1$ est pédal; par suite $A_2B_2C_2$ est la droite harmoniquement associée au point dont $A_1B_1C_1$ est le triangle pédal.

On sait que le lieu des points P dont $A_1B_1C_1$ est le triangle pédal est la cubique des réciproques relative au réciproque de l'orthocentre.

$$\sum \alpha \cot g A (\beta^2 - \gamma^2) = 0.$$

250. — *Lieu des foyers des coniques inscrites à un triangle, et dont le centre décrit une droite donnée :*

$$lx + my + nz = 0.$$

Les foyers étant des points inverses, on trouve la cubique :

$$2xyz \sum al + \sum x(y^2 + z^2)(cm + bn) = 0.$$

Elle est sa propre transformée par points inverses, et est circonscrite au triangle de référence.

EXERCICE ÉCRIT

64. — Soient Δ, Δ' deux droites fixes, sécantes en O. Sur Δ, on donne un point fixe A; sur Δ', un autre point fixe A'. Par les points A, A', on fait passer des circonférences mobiles qui coupent Δ, Δ' aux points B, B'. Soit H l'hyperbole équilatère passant par les points A, A', B, B'.

1° Trouver le lieu décrit par le centre de H; ce lieu est une droite.

2° Quel est le lieu des sommets de H; ce lieu est un système de deux coniques.

Soit Γ l'une d'entre elles.

3° Trouver pour quelle valeur des paramètres $OA = a$, $OB = b$. Γ est une conique dégénérée.

4° Par O, on mène à H des tangentes; le lieu des points de contact est une cubique que l'on propose de construire.

Note sur l'exercice 63.

1° Le lieu des centres de Γ est une hyperbole ayant pour équation

$$(x \cos\theta + y)(x + y \cos\theta) - a(x + y) + \frac{a^2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 0.$$

On peut noter que l'origine est un foyer, cette équation pouvant se mettre sous la forme

$$(x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta) \sin^2\frac{\theta}{2} = \left[(x + y) \cos\frac{\theta}{2} - \frac{a}{2\cos\frac{\theta}{2}}\right]^2.$$

2° Si l'on pose $OA = u$, $OB = v$, il existe entre les paramètres u,

une relation homographique. Cette relation, qui s'établit par divers procédés, est

$$uv \cos^2 \frac{\theta}{2} - a(u+v) + a^2 = 0.$$

En désignant par x_0, y_0 les coordonnées du pôle AB, par rapport à Γ, on trouve

$$x_0 = \frac{v}{2 \cos \theta}, \qquad y_0 = \frac{u}{2 \cos \theta}.$$

Le lieu demande est une hyperbole, etc...

3° La détermination de l'enveloppe des circonférences Γ se ramène à la recherche de la polaire de O par rapport à l'hyperbole trouvée dans la premier paragraphe. Comme O est un foyer de cette hyperbole, on trouve que l'enveloppe est une circonférence.

Le calcul donne

$$\left[x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta - \frac{a}{\cos^2 \theta}(x+y)\right]^2 = \frac{4xya^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^4 \frac{\theta}{2}}.$$

On trouve le facteur $x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta$, puis, finalement

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta - \frac{2a}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}(x+y) + \frac{a^2}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} = 0.$$

4° Le lieu demandé est une cubique unicursale correspondant aux formules

$$\frac{x}{a} = \frac{2t(1-2t)}{3t^2 - 6t + 2}, \qquad \frac{y}{a} = \frac{2t^2(3t-2)}{3t^2 - 6t + 2},$$

en supposant $\theta = 60°$, pour mieux préciser la forme de la courbe.

Dans ces développements, a désigne la longueur des tangentes fixes menées, de O, au cercle fixe Δ.

QUESTION 313

Solution par M. C. Grolleau, Répétiteur général au Lycée de Marseille.

1° *Soient* MA, MB *deux tangentes à une parabole* P. *Le demi-paramètre* p *de cette courbe est donné par la formule*

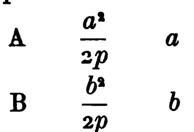
$$p.\overline{MO}^3 = (aire\ MAB)^2 ;$$

O *désignant le milieu de* AB.

2° *En utilisant cette relation, montrer que le lieu des foyers des paraboles de forme invariable, inscrites à un angle fixe* θ, *est la quartique correspondant à l'équation*

$$4x^2y^2 \sin^4 \theta = p^2(x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta). \qquad \text{(G. L.)}$$

1° Considérons la parabole représentée par $y^2 - 2px = 0$ et deux points A et B de cette parabole :



$$\text{A} \quad \frac{a^2}{2p} \quad a$$

$$\text{B} \quad \frac{b^2}{2p} \quad b$$

Les tangentes à la parabole, en ces points A et B, ont pour équations

$$2px - 2ay + a^2 = 0,$$
$$2px - 2by + b^2 = 0,$$

et les coordonnées du point M d'intersection de ces tangentes sont:

$$\text{M} \quad \frac{ab}{2p} \quad \frac{a+b}{2}.$$

De plus, les coordonnées du point O, milieu de AB, sont

$$\frac{a^2+b^2}{4p} \quad \frac{a+b}{2}$$

On a donc,

$$\text{aire MAB} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{a^2}{2p} & a & 1 \\ \frac{b^2}{2p} & b & 1 \\ \frac{ab}{2p} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

En développant, aire MAB $= \pm \dfrac{(a-b)^3}{2^3 p}$,

par suite $\quad (\text{aire MAB})^2 = \dfrac{(a-b)^6}{2^6 p^2}$;

or, $\quad \overline{\text{MO}}^2 = \left(\dfrac{ab}{2p} - \dfrac{a^2+b^2}{4p}\right)_2 = \dfrac{(a-b)^4}{4^2 p^2}$:

d'où $\quad \overline{\text{MO}}^3 = \dfrac{(a-b)^6}{2^6 p^3}$.

Par suite $\quad p.\text{MO}^3 = (\text{aire MAB})^2$,

p étant le demi-paramètre de la parabole. C. Q. F. D.

2° — L'équation générale des paraboles tangentes aux deux axes des coordonnées est :

$$(ay - bx)^2 - 2ab^2x - 2a^2by + a^2b^2 = 0.$$

En écrivant que le paramètre de cette parabole est constant, on a :

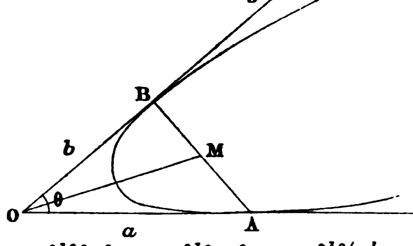
$$p = \frac{(\text{aire OAB})^2}{\overline{\text{OM}}^3}.$$

Or, aire AOB $= \frac{1}{2} ab \sin\theta$;

et $$\overline{\text{MO}}^3 = \frac{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{2^3}.$$

Par suite, $$p = \frac{2a^2b^2\sin^2\theta}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (1)$$

Pour avoir le lieu des foyers, nous allons écrire que l'ensemble des tangentes issues du foyer (α, β) a pour équation celle d'un point-cercle.



Or, l'équation du faisceau des tangentes issues du point (α, β) à la parabole, peut s'écrire

$$4a^2b^2\beta x^2 + 4a^2b^2\alpha y^2 + 4a^2b^2(ab - b\alpha - a\beta)xy + \ldots = 0,$$

on a donc

$$(2), (3) \qquad 2b\beta = 2a\alpha = \frac{ab - b\alpha - a\beta}{\cos\theta}.$$

L'élimination de a et b, entre les équations (1), (2) et (3), conduit à l'équation du lieu.

Or, les équations (2) et (3) donnent

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta)^2(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha^2\beta^2},$$

$$2ab = \frac{2(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta)^2}{\alpha\beta}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (1) élevée au carré, on obtient, après simplifications et après avoir repris les coordonnées courantes,

$$4x^2y^2\sin^4\theta = p^2(x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta).$$

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 714-1-93.

SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES
ET L'ÉLIMINATION

Par M. **H. Laurent.**

Soient $\psi(x)$ une fonction entière de x et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ les racines de l'équation $\psi(x) = 0$. Soit $f(x)$ une autre fonction entière de x et proposons-nous de former la fonction symétrique

$$\Theta = [z - f(\alpha_1)][z - f(\alpha_2)] \ldots [z - f(\alpha_n)].$$

A cet effet, rappelons que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

est égal à la racine carrée de

$$\begin{vmatrix} 1, & \Sigma_1, & \ldots & \Sigma\alpha_1^{n-1} \\ \Sigma\alpha, & \Sigma\alpha^2, & \ldots & \Sigma\alpha^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma\alpha^{n-1}, & \ldots & \ldots & \Sigma\alpha^{2n-2} \end{vmatrix} = \Delta$$

et que les éléments de ce déterminant sont les coefficients du développement de $\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}$ ordonné suivant les puissances de $\frac{1}{x}$.

Considérons le produit

$$P = \begin{vmatrix} z - f(\alpha_1), & z - f(\alpha_2) & \ldots & z - f(\alpha_n) \\ \alpha_1[z - f(\alpha_1)], & \alpha_2[z - f(\alpha_2)] & \ldots & \alpha^n[z - f(\alpha_n)] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1}[z - f(\alpha_1)], & \ldots & \ldots & \alpha_n^{n-1}[z - f(\alpha_2)] \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

on a évidemment $\qquad P = \Theta\Delta.$

On a aussi

$$P = \begin{vmatrix} \Sigma(z - f(\alpha)], & \Sigma\alpha[z - f(\alpha)] & \ldots & \Sigma\alpha^{n-1}[z - f(\alpha)] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma\alpha^{n-1}[z - f(\alpha)], & \Sigma\alpha^{n}[z - f(\alpha)] & \ldots & \Sigma\alpha^{n-2}[z - f(\alpha)] \end{vmatrix}.$$

Le déterminant qui figure dans cette formule a pour éléments les coefficients du développement de $\frac{z - f(x)}{x - \alpha}\psi'(x)$ effectué suivant les puissances de $\frac{1}{x}$. En effet, le reste de la division de $[z - f(x)]\psi'(x)$, par $\psi(x)$, étant un polynôme de degré $n - 1$ est donné par la formule d'interpolation de Lagrange ou :

$$\sum \frac{z - f(\alpha)}{x - \alpha}\ \psi(x).$$

En divisant ce reste par $\psi(x)$ on a

$$\sum \frac{z - f(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{1}{x}\Sigma[z - f(\alpha)] + \frac{1}{x}z\Sigma\alpha[z - f(\alpha)]x\ldots$$

La fonction Θ est donc le quotient de deux déterminants P et Δ, faciles à écrire. Donc

1° Il est facile de former une équation qui a pour racines, $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2)\ldots. f(\alpha_n)$. Cette équation est $\Theta = 0$.

2° Le dernier terme de cette équation, ou

$$\pm \begin{vmatrix} \Sigma f(\alpha), & \Sigma\alpha f(\alpha) & \ldots & \Sigma\alpha^{n-1} f(\alpha) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma\alpha^{n-1} f(\alpha), & \Sigma\alpha^{n} f(\alpha) & \ldots & \Sigma\alpha^{2n-2} f(\alpha) \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta},$$

égalé à zéro est la résultante des équations $f = 0$, $\psi = 0$. D'ailleurs les éléments du déterminant qui figure dans cette formule sont les coefficients de $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots$ dans le développement de $\frac{f(x)}{\psi(x)}\psi'(x)$.

3° L'avant-dernier terme de l'équation $\Theta = 0$ est

$$\Sigma f(\alpha_1).f(\alpha_2)\ldots f(\alpha_{n-1}).$$

Il est nul quand $f = 0$ et $\psi = 0$ ont deux racines communes;

4° Le terme qui précède celui-là est nul quand $f = 0$ et $\psi = 0$ ont trois racines communes, etc.

5° Réciproquement, pour que $f = 0$, $\psi = 0$ aient deux, trois,... racines communes, il faut que $\Theta = 0$ ait deux, trois ... racines nulles ; donc, etc.

SUR LES CYCLIQUES PLANES

Par M. **F. Michel**, lieutenant du Génie.

(*Suite et fin*, voir page 15.)

XI. — Classification des cycliques.

1 — Pour distinguer les différentes espèces de cycliques, nous nous appuierons sur la forme et la position relative d'un des cercles directeurs et de la conique focale correspondante.

Cette classification correspond aux différentes formes de la conique principale, et c'est ce qui nous a permis d'en indiquer plus haut les principaux traits.

Mais avant de l'aborder, il est nécessaire de démontrer deux théorèmes dont nous ferons usage.

Théorème. — *Les pieds des normales abaissées d'un des pôles principaux d'une cyclique sur la conique focale correspondante, sont sur la conique principale.*

En effet, la normale à une des coniques focales

$$\frac{4x^2}{A+\lambda} + \frac{4y^2}{C+\lambda} + 1 = 0$$

a pour équation
$$\frac{X-x}{\dfrac{x}{A+\lambda}} = \frac{Y-y}{\dfrac{y}{C+\lambda}}.$$

Si l'on écrit qu'elle passe au point dont les coordonnées sont :

$$-\frac{D}{A+\lambda}, \qquad -\frac{E}{C+\lambda}$$

on trouve, tous calculs faits :

$$(C-A)xy + Ex - Dy = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème. — *La corde des contacts d'un cercle bitangent à une cyclique est perpendiculaire à la tangente menée à la conique focale, au point qui est le centre de ce cercle.*

Car la corde de contact a pour équation (VI) :

$$(A + \lambda + 4\alpha^2)x + 4\alpha\beta y + D - \lambda\alpha - 2\alpha\gamma = 0$$

et la tangente à la conique focale correspondante en (α, β) :

$$\frac{4\alpha x}{A + \lambda} + \frac{4\beta y}{C + \lambda} + 1 = 0.$$

Ces deux droites sont rectangulaires, car

$$\frac{4\alpha}{A + \lambda}(A + \lambda + 4\alpha^2) + \frac{4\beta}{C + \lambda} \cdot 4\alpha\beta = 4\alpha\left[\frac{4\alpha^2}{A + \lambda} + \frac{4\beta^2}{C + \lambda} + 1\right] = 0.$$

2. — Soient alors O le centre d'une cyclique S, p_1 l'un des pôles principaux, C_1 le cercle directeur qui a ce point pour centre et F_1 la conique focale correspondante.

On aura trois cas principaux à examiner :

1° Le point p_1 n'est pas sur l'un des axes de la conique F_1. La conique principale est une hyperbole équilatère.

2° Le point p_1 est sur un des axes de F_1. La conique principale se réduit à deux droites rectangulaires dont l'une est l'axe considéré.

3° Le point p_1 est au centre de F_1. La conique principale est formée par les deux axes de F_1.

A chacun de ces trois cas généraux, que nous allons étudier, correspond un groupe de cycliques.

Premier groupe. *Cycliques sans axe de symétrie.* — La conique principale est une hyperbole équilatère.

(α). La conique F_1 et le rayon du cercle C_1 sont pris arbitrairement; c'est la *cyclique générale.*

(β). Le rayon du cercle C_1 est nul; alors la cyclique est l'enveloppe des cercles ayant leurs centres sur F_1 et passant au point p_1. La cyclique a donc un point double en p_1, et les tangentes en ce point sont, d'après ce qui précède (VI), perpendiculaires aux asymptotes de F_1; on a donc une *cyclique à point double.*

Deuxième groupe. *Cycliques à un axe de symétrie ou spiriques.* — La conique principale se réduit à deux droites dont l'une est op_1 et l'autre perpendiculaire; cette dernière rencontre F_1 aux deux points de contact de cette conique avec un cercle bitangent de centre p_1, d'après un des théorèmes énoncés plus haut.

On aura, comme dans le groupe précédent, des subdivisions correspondant aux mêmes cas :

(α). *Spiriques générales.*

(β). *Spiriques à point double.*

Mais il peut se faire que le cercle C_1 soit bitangent à la conique F_1 en deux points m et n; dans ce cas, ces deux points sont des points doubles de la spirique, et les tangentes y sont encore perpendiculaires aux asymptotes de F_1. La droite mn fait partie de la conique principale; on a donc une troisième classe de cycliques :

(γ). *Spiriques à deux points doubles*, et l'on peut dire que :

Théorème. — *Toute cyclique à deux points doubles est une spirique; l'axe de la spirique est la perpendiculaire élevée au milieu de la droite des points doubles.*

Troisième groupe. *Cycliques à deux axes de symétrie.* — Le point p_1 coïncide alors avec le centre de la conique focale ; la conique principale est formée par les deux axes de F_1 et l'on a trois classes de cycliques, analogues à celles du groupe précédent :

(α). *Cycliques générales à deux axes.*

(β). *Cycliques à deux axes, à point double.*

(γ). *Cycliques à deux axes, à deux points doubles.*

3. — Il resterait à examiner deux cas : celui où la conique focale F_1 est une parabole. Le centre O de la cyclique est alors rejeté à l'infini, et l'équation de la courbe tombe au troisième degré; on a, dans ce cas, *une cubique circulaire.*

2° Enfin la conique focale F_1 peut être un cercle : si on se reporte à l'équation de cette conique, on voit que les coefficients A et C sont alors égaux, et l'équation de la cyclique devient

$$\left(x^2 + y^2 + \frac{A}{2}\right)^2 + 2Dx + 2Ey + F - \frac{A^2}{4} = 0.$$

On voit, sur cette équation, que les points circulaires de l'infini sont des points de rebroussement de la courbe. La cyclique est une cartésienne.

Je ne m'étendrai pas sur les propriétés des cycliques cartésiennes; on remarquera seulement que, dans ce cas, quelle

que soit la position du point p_1 dans le plan, la droite op, est toujours un axe du cercle focal F_1, et que la cyclique est symétrique par rapport à cet axe. Les cartésiennes ont donc des propriétés analogues à celle des spiriques.

FORMES DIVERSES, EN COORDONNÉES NORMALES, DE L'ÉQUATION D'UN CERCLE Δ DE CENTRE ET DE RAYONS DONNÉS

Par M. **Bernès.**

1. — Les coordonnées courantes étant x, y, z, celles du centre ω étant x_1, y_1, z_1, et désignant le rayon ρ, une première forme remarquable est

$$a)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix} = \frac{S^2\rho^2}{R^2}.$$

Les deux asymptotes du cercle sont en évidence; ce sont les isotropes du centre ω; et si le rayon est nul, le cercle se réduit au système de ces deux isotropes.

Remarque préliminaire. — *Si l'on désigne par* α', β', γ' *les angles* (BC, L), (CA, L), (AB, L), *définis à* $2K\pi$ *près, qu'une même direction* L *fait avec les directions* BC, CA, AB, *les quantités* $e^{i\alpha'}$, $e^{i\beta'}$, $e^{i\gamma'}$ *sont proportionnelles à* α, β, γ. Car

$$\beta' = (CA, L) = (CA, AB) + (AB, L) = \pi - A + \gamma'.$$

D'où
$$e^{i\beta'} = - e^{-iA} e^{i\gamma'} = \frac{\beta}{\gamma} e^{i\gamma'}.$$

Donc
$$\frac{\beta}{e^{i\beta'}} = \frac{\gamma}{e^{i\gamma'}}.$$

Nous désignerons par ε les trois rapports égaux

$$\frac{\alpha}{e^{i\alpha'}} = \frac{\beta}{e^{i\beta'}} = \frac{\gamma}{e^{i\gamma'}}.$$

Lemme. — M, ω *étant deux points réels quelconques, dont les coordonnées sont* x, y, z, x_1, y_1, z_1, *la droite* ωM *est la résultante du contour polygonal*

$$-\frac{R}{S}\varepsilon\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix}$$

construit en prenant pour origine ω *et pour axe polaire une direction* L *qui fait avec* BC, CA, AB *les angles* α', β' γ'.

Soit P la rencontre d'une parallèle à AC menée par ω et d'une parallèle à AB menée par M. En quantités complexes

$$\omega M = \omega P + PM.$$

Or $$\omega P = \frac{z_1 - z}{\sin A} e^{i(L, CA)} = \frac{z_1 - z}{\sin A} \cdot \frac{\varepsilon}{\beta}$$

et $$PM = \frac{y - y_1}{\sin A} \cdot \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

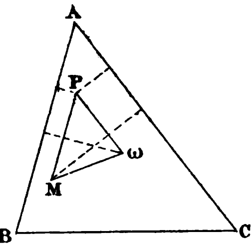
D'où $$\omega M \sin A = \varepsilon \left[\frac{y}{\gamma} - \frac{z}{\beta} - \left(\frac{y_1}{\gamma} - \frac{z_1}{\beta}\right)\right].$$

On obtiendrait de même

$$\omega M \sin B = \varepsilon \left[\frac{z}{\alpha} - \frac{x}{\gamma} - \left(\frac{z_1}{\alpha} - \frac{x_1}{\gamma}\right)\right]$$

$$\omega M \sin C = \varepsilon \left[\frac{x}{\beta} - \frac{y}{\alpha} - \left(\frac{x_1}{\beta} - \frac{y_1}{\alpha}\right)\right].$$

Si l'on ajoute ces trois équipollences, après les avoir multipliées respectivement par x_1, y_1, z, on obtient, conformément au lemme,



$$\omega M = -\frac{R}{S}\varepsilon\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix}.$$

Comme cas particulier, lorsqu'on prend la direction BC pour axe polaire, $\varepsilon = \alpha$.

De ce lemme résulte la forme (a). Car la quantité conjuguée du second membre de l'égalité précédente étant

$$-\frac{R}{S}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix},$$

on a, ρ étant le module de ωM,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix} = \frac{S^2}{R^2}\rho^2.$$

Telle est donc l'équation du cercle de centre ω et de rayon ρ

2. — D'autres formes se rattachent à la forme (a).

En premier lieu, l'identité, facile à vérifier,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \frac{i}{2}\sum \frac{a\beta\gamma}{\alpha}(x - x_1),$$

d'où

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix} = -\frac{i}{2}\sum \frac{a\alpha}{\beta\gamma}(x - x_1),$$

donne la forme

$$(a') \qquad \sum \frac{a\beta\gamma}{\alpha}(x - x_1) \times \sum \frac{a\alpha}{\beta\gamma}(x - x_1) = \frac{4S^2\rho^2}{R^2}.$$

De là, en développant le produit $\Sigma.\Sigma$ et en ayant égard à l'identité $\Sigma a(x - x_1) = 0$ on arrive à la forme bien connue

$$(a'') \qquad \Sigma a(y - y_1)(z - z_1) = -\frac{S\rho^2}{R}.$$

Et, inversement, on peut remonter de celle-ci aux formes (a_1) et (a).

3. *Remarques.* — Désignons par φ et φ' les fonctions

$$-\frac{1}{2S}\sum \frac{a\beta\gamma}{\alpha}x, \qquad -\frac{1}{2S}\sum \frac{a\alpha}{\beta\gamma}x$$

et par suite par φ_1 et φ_1' les valeurs de ces fonctions pour les coordonnées x_1, y_1, z_1 du centre ω, l'équation du cercle s'écrit alors

$$(a''') \qquad (\varphi - \varphi_1)(\varphi' - \varphi_1') = \frac{\rho^2}{R^2}.$$

1° On voit que φ s'annule pour les coordonnées α, β, γ du premier point cyclique et aussi pour les coordonnées x_0, y_0, z_0, ou $R\cos A$, $R\cos B$, $R\cos C$ du point O, $\varphi = 0$ est donc la première isotrope du point O, et de même $\varphi' = 0$ est la seconde isotrope de O.

2° Si l'on considère le centre $\Sigma ayz - 2S(lx + my + nz) = 0$,

nous avons trouvé pour les coordonnées x_1, y_1, z_1 de son centre

$$\frac{2(x_1 - x_0)}{R} = -\left(\alpha\delta' + \frac{\delta}{\alpha}\right), \qquad \frac{2(y_1 - y_0)}{R} = -\left(\beta\delta' + \frac{\delta}{\beta}\right) \qquad \text{etc.}$$

où

$$\delta = \sum l\alpha, \qquad \delta' = \sum \frac{l}{\alpha}.$$

En ajoutant ces égalités, après les avoir multipliées respectivement par

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha}, \quad \frac{\gamma\alpha}{\beta}, \quad \frac{\alpha\beta}{\gamma},$$

on obtient $\delta = \varphi_1$, $\delta' = \varphi_1'$.

Alors les quatre identités

$$lx + my + nz = \frac{\Sigma ayz}{2S},$$

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = \varphi_1,$$

$$\frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = \varphi_1',$$

$$2l\cos A + 2m\cos B + 2n\cos C = 1 + \varphi_1\varphi_1' - \frac{\rho^2}{R^2}$$

(celle-ci résulte de l'expression du rayon), donnent pour l'équation d'un cercle de centre et de rayon donnés la forme

$$(b) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & \dfrac{\Sigma ayz}{2S} \\ \alpha & \beta & \gamma & \varphi_1 \\ \dfrac{1}{\alpha} & \dfrac{1}{\beta} & \dfrac{1}{\gamma} & \varphi_1' \\ 2\cos A & 2\cos B & 2\cos C & 1 + \varphi_1\varphi_1' - \dfrac{\rho}{R^2} \end{vmatrix} = 0,$$

qui, développée suivant les éléments de la première ligne, rentre dans le type

$$\Sigma ayz - 2S(lx + my + nz) = 0.$$

Cette même forme, développée suivant les éléments de la dernière colonne, donne encore, en ayant égard à l'identité

$$\varphi\varphi' = 1 - \frac{\Sigma ayz}{RS},$$

la forme
$$(a''')(\varphi - \varphi_1)(\varphi' - \varphi_1') = \frac{\rho^2}{R^2}$$

et par suite la forme (a).

3° Le théorème, établi dans une note précédente, sur la valeur et le sens de $O\omega$, peut aussi se déduire de ces considérations. Ce théorème revient à l'équipollence $O\omega = - iR\alpha\delta'$, ou $O\omega = - iR\alpha\varphi_1'$. Or, si l'on applique le lemme aux deux points O et ω en prenant BC pour direction de l'axe polaire,

$$O\omega = -\frac{R}{S}\alpha \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix}$$

et comme

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix} = -\frac{i}{2}\sum \frac{a\alpha}{\beta\gamma}x_1 = iS\varphi_1'$$

il en résulte bien

$$O\omega = - iR\alpha\varphi_1'.$$

4°. Si η, ξ sont les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque M rapportées à deux axes dont l'un L fait avec BC, CA, AB les angles α', β', γ' et l'autre fait avec L l'angle $+\frac{\varpi}{2}$, les coordonnées normales de l'origine étant x_1, y_1, z_1, le lemme montre que les formules de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées normales sont comprises dans l'égalité

$$\eta + i\xi = -\frac{R}{S}\varepsilon \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix}.$$

4. — Une autre forme également remarquable de l'équation du cercle est

$$(c) \qquad \Sigma ayz = 2S\left[\frac{A_\omega x}{bc} + \frac{B_\omega y}{ca} + \frac{C_\omega z}{ab}\right]$$

où A_ω, B_ω, C_ω désignent les puissances de A, B, C relativement au cercle, puissances immédiatement exprimables en fonction de x_1, y_1, z_1.

Cette forme est intuitive. Si d, d', d'' sont les distances de A, B, C à la droite $lx + my + nz = 0$ de l'équation

$$\Sigma ayz = 2S(lx + my + nz),$$

on a, d'après un théorème plusieurs fois invoqué, $A_\omega = 2O\omega.d$ et l'on a vu que

$$\frac{O\omega}{R} = \frac{2Sl}{ad}.$$

Donc, $\quad A_\omega = l\,\frac{4SR}{a}, \quad$ ou $\quad \frac{A_\omega}{bc} = l,$

et de même $\quad \frac{B_\omega}{ca} = m \qquad \frac{C_\omega}{ab} = n.$

Si l'on met ρ^2 en évidence dans la formule (c) elle devient

$$(c') \qquad \sum \frac{A\omega^2 x}{bc} - \frac{\Sigma ayz}{2S} = \frac{\rho^2}{2R}.$$

C'est une expression à remarquer de la distance de deux points ω, M.

Corollaire. — *Relation entre les trois puissances* A_ω, B_ω, C_ω *des trois points* A, B, C, *relativement à un même cercle* ω.

En appliquant à la formule (c) la formule

$$\frac{\rho^2}{R} = 1 + \delta\delta' - 2\Sigma.l \cos A,$$

on obtient

$$\sum \left(\frac{A_\omega}{bc}\right)^2 - 2\sum\left(\frac{B_\omega}{ca}\cdot\frac{C_\omega}{ab} + \frac{A_\omega}{bc}\right)\cos A + 1 = \frac{\rho^2}{R^2}.$$

Si $\rho = 0$, cette relation devient

$$\sum \frac{A\omega^4}{b^2c^2} - 2\sum\left(\frac{B\omega^2}{ca}\cdot\frac{C\omega^2}{ab} + \frac{A\omega^2}{bc}\right)\cos A + 1 = 0.$$

C'est une des formes de la relation entre les distances d'un point quelconque ω à trois points A, B, C, situés dans un même plan avec ω.

5. — Cette forme (c) en suggère une autre.

$$(d) \qquad x_1\frac{M_A}{bc} + y_1\frac{M_B}{ca} + z_1\frac{M_C}{ab} = \frac{\Sigma ayz}{2S},$$

où M_A, M_B, M_C sont les puissances d'un point quelconque M du cercle ω, relativement à trois cercles de même rayon ρ que le cercle ω ayant A, B, C pour centres; puissances dont l'expression en x, y, z est évidente.

On y arrive en échangeant entre eux les trois points x, y, z; x_1, y_1, z_1 dans l'égalité

$$(c') \qquad \sum \frac{A\omega^2}{bc}x - \sum\frac{ayz}{2S} = \frac{\rho^2}{2R}.$$

ce qui donne d'abord l'équation du cercle sous la forme

$$(d') \qquad \sum \frac{\mathrm{AM}^2}{bc} x_1 = \frac{\Sigma a y_1 z_1}{2\mathrm{S}} + \frac{\rho^2}{2\mathrm{R}};$$

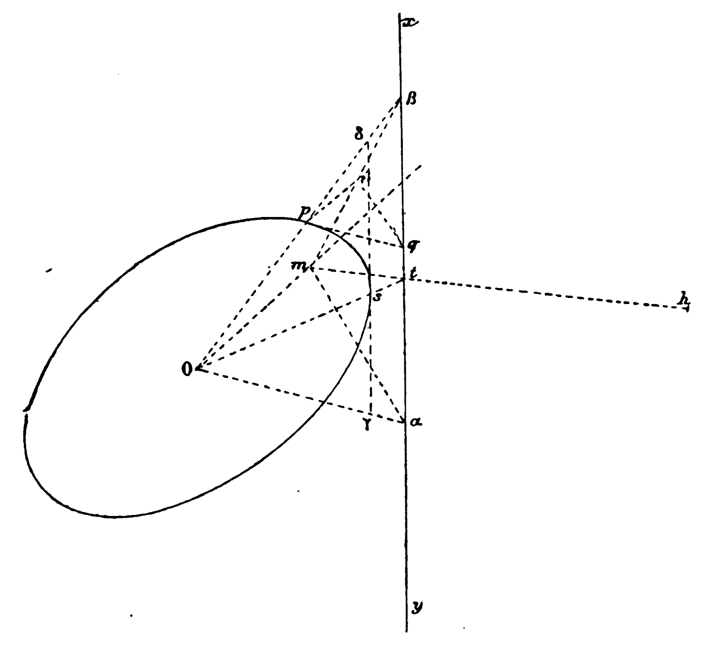
c'est une forme simple de l'équation du cercle en coordonnées tripolaires.

NOTE DE GÉOMETRIE DESCRIPTIVE

Par M. **Aug. Morel,** professeur à l'École Lavoisier.

DÉTERMINATION DES AXES DE LA PROJECTION D'UNE SECTION PLANE D'UN CYLINDRE DU SECOND DEGRÉ

Nous supposons le cylindre et le plan connus par leurs traces horizontales. Si, par le centre de la base du cylindre, nous traçons la parallèle aux génératrices, elle rencontre le



plan sécant en un point projeté horizontalement en m, et verticalement en m'.

Dans la figure ci-jointe, nous avons seulement indiqué les

projections horizontales; nous déterminerons d'abord les éléments de la courbe, projection horizontale de l'intersection. En outre, nous supposons que la courbe de base est une ellipse; il en est de même de la courbe de section et de sa projection. On verra plus loin ce qui arrive dans les cylindres hyperboliques ou paraboliques.

Observons d'abord que tout plan qui passe par la droite projetée horizontalement en Om, rencontre le cylindre suivant deux droites parallèles à la précédente, également distantes de cette droite; ce même plan coupe le plan sécant suivant une droite passant par m, et rencontrant les génératrices précédentes en deux points également distants de m; ce point m est donc un centre; cette propriété se conserve en projections.

Cela posé, cherchons à déterminer, dans la projection, un système de diamètres conjugués dont l'un est dirigé suivant $m\alpha$. On sait que la tangente à l'extrémité du diamètre conjugué est parallèle à $m\alpha$. Prenons donc le plan tangent parallèle à la droite du plan projetée suivant $m\alpha$; pour cela, α étant dans le plan horizontal ainsi que le point O, traçons $O\alpha$, et prenons la tangente pq, parallèle à $O\alpha$, ayant son point de contact en p, et rencontrant la trace de plan en q; puis menons, par p, la droite pr parallèle à la projection Om; et, par q, la droite qr, parallèle à αm; mr est le demi-diamètre conjugué de $m\alpha$.

Les triangles $Om\alpha$, prq sont homothétiques; donc les droites Op, xy, et mr concourent en un point β, qui appartient au diamètre de la base, conjugué du diamètre $O\alpha$. En cherchant la tangente parallèle à $m\beta$, on déterminera l'extrémité du demi-diamètre dirigé suivant $m\alpha$.

Je dis maintenant que la connaissance des points α et β va nous permettre de déterminer les diamètres conjugués rectangulaires, c'est-à-dire les axes de la projection horizontale. Pour le prouver, traçons le diamètre Os de la base dont la direction est conjuguée de xy; il rencontre la courbe en s et xy en t; si nous menons, par s, la tangente à la courbe, elle rencontre $O\alpha$ en γ, et $O\beta$ en δ; puisque $O\alpha$ et $O\beta$ sont deux

diamètres conjugués quelconques, s étant fixe, on a

$$s\gamma . s\delta = \text{const.}$$

De plus, comme $\alpha t\beta$ est parallèle à $\gamma s\delta$, on peut écrire

$$\frac{t\alpha}{s\gamma} = \frac{t\beta}{s\delta} = \frac{Ot}{sO};$$

donc

$$\frac{t\alpha . t\beta}{s\gamma . s\delta} = \frac{\overline{Ot}^2}{\overline{Os}^2}.$$

Or, dans cette proportion, le second membre est constant; le dénominateur $s\gamma . s\delta$ étant constant, on a

$$t\alpha . t\beta = \text{const.}$$

Il en résulte que si l'on mène une circonférence par les points m, α et β, elle rencontre la droite mt en un point h qui est fixe, car

$$mt . th = t\alpha . t\beta = \text{constante.}$$

Cela posé, si nous considérons les points A et B où les axes mA et mB rencontrent xy, l'angle AmB étant droit, le centre de la circonférence précédente doit se trouver sur xy. De là résulte la construction suivante :

On détermine d'abord le point m, *projection horizontale de l'intersection du plan et de la parallèle aux génératrices menée par le point* O; *puis on prend le point* t, *rencontre de* xy *avec le diamètre de la base qui est conjugué de la direction* pq ; *et, sur la base, on trace un système de diamètres conjugués quelconques, rencontrant* xy *en* α *et* β; *la circonférence déterminée par* m, α *et* β *rencontre la droite* mt *en un point* h. *Enfin la perpendiculaire à* mh, *en son milieu, rencontre* pq *en un point* ω; *on décrit alors la circonférence ayant* ω *pour centre et passant par le point* m ; *cette circonférence coupe* xy *en* A *et* B; *les lignes* mA *et* mB *sont les axes de la projection horizontale.*

Si l'on prend les projections verticales des différents points, m vient en m' sur la parallèle à la projection verticale des génératrices menée par O′, projection du centre sur la ligne de terre ; les points α, t, β se projettent sur la ligne de terre en α', t', β'. Soit φ l'angle de xy avec LT. On a :

$$t'\alpha' = t\alpha \cos \varphi.$$
$$t'\beta' = t\beta \cos \varphi.$$

donc $t'\alpha' . t'\beta' = t\alpha . t\beta . \cos^2 \varphi$.

Le produit $t'\alpha' . t'\beta'$ étant constant, la circonférence $m'\alpha'\beta'$ rencontre $m't'$ en un point l', qui est fixe. On répétera

sur la figure formée par $l'm'$ et la ligne de terre, la même construction que précédemment. On obtiendra ainsi deux points C′ et D′ que l'on rappellera, en C et D, sur xy; les diamètres qui ont pour projections horizontales mC et mD se projettent verticalement suivant les axes de la projection verticale.

Si la base du cylindre est une hyperbole, il en sera de même de la section plane et de ses projections. De plus, les asymptotes de chaque projection seront les projections des intersections du plan avec les plans asymptotiques du cylindre, et l'on sait que les axes d'une hyperbole sont les bissectrices des angles des asymptotes.

Enfin, si la base du cylindre est une parabole, les diamètres sont tous parallèles entre eux, les plans menés par chaque diamètre, parallèlement aux génératrices du cylindre, coupent le plan suivant des droites qui sont les diamètres de la section, et se projettent suivant les diamètres de la projection. La tangente au sommet de la projection est perpendiculaire à la direction des diamètres. On tracera donc une droite du plan horizontal, perpendiculaire aux diamètres de la projection horizontale; puis on mènera, au cylindre, le plan tangent parallèle à la droite du plan qui a cette ligne pour projection, Il coupera le plan sécant suivant la droite qui se projette sur la tangente au sommet de la projection. Une marche analogue pourra s'appliquer à la projection verticale.

CONSTRUCTION DE LA TANGENTE

A L'ATRIPHTHALOÏDE (*)

Nous nous proposons d'indiquer, dans cette Note, une construction de la tangente à cette courbe remarquable; nous

---

(*) Le Dr Haughton a rencontré, au cours de ses recherches sur la forme de la surface des mers recouvrant une sphère attractive, une famille très générale des courbes qu'il a nommées *Atriptothalassic curves.*

Parmi elles, il a particulièrement distingué la courbe qui nous occupe ici, et qu'il désigne sous le nom d'Atriphthaloide.

Cette dernière a fait l'objet d'une Note du Rev. Richard Townsend.

exposerons, d'abord, une transformation des courbes conduisant à un théorème susceptible d'applications très nombreuses.

1. — Considérons deux axes rectangulaires Ox, Oy. Soient M un point; OP, MP ses coordonnées. Posons $OM = r$, $OP = x$; les quantités r, x définissent les coordonnées de ce point et l'équation

$$f(x, r) = 0$$

représente une courbe Γ. Si nous prenons $P\mu = OM$, le lieu de μ est une courbe Γ', transformée de Γ. Nous nous proposons de rechercher la tangente à Γ', au point μ, connaissant la tangente à Γ, au point M; *et vice versa*.

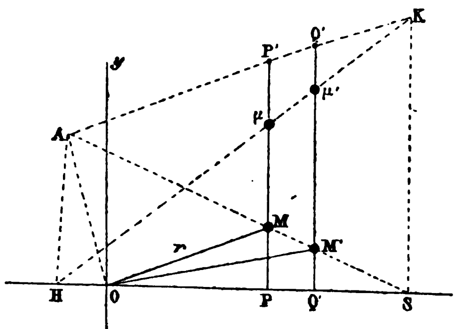


Fig. 1.

Prenons $\mu P' = PM$; puis, répétons cette construction pour le point M', infiniment voisin de M, sur Γ. Les égalités

$$MP' = OM, \quad M'Q' = OM',$$

prouvent que P'Q' rencontre MM' en un point A, tel que

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{OM}{OM'}.$$

Ainsi, A est le pied de la bissectrice extérieure de l'angle NOM'.

---

publiée en 1882 dans les *Proceedings of the Royal Irish Academy*, note ayant pour titre : *On the Geometrical properties of the Atriphthaloid*.

D'après un renseignement obligeant, l'étymologie du mot Atriptothalassic peut s'expliquer ainsi :

ἄτριπτος — θάλασσα;

ATRIPTOS, *non broyé, non usé, ... intact;*

THALASSA, *mer.*

Alors, l'adjectif imaginé par le D[r] Haugton doit signifier *forme essentielle, forme primitive de la surface des mers.*

D'autre part, si $\mu\mu'$ coupe P'Q' en K, ce point appartient, pour des raisons évidentes, à la parallèle à Oy menée par S, point où MM' coupe Ox.

En passant à la limite, OR devient la perpendiculaire élevée en O, au vecteur OM; MM' devient la tangente δ en M à Γ et il résulte de la remarque précédente, une construction qui permet, connaissant δ, de trouver la droite δ' tangente à Γ', au point μ. Voici le résumé de cette construction :

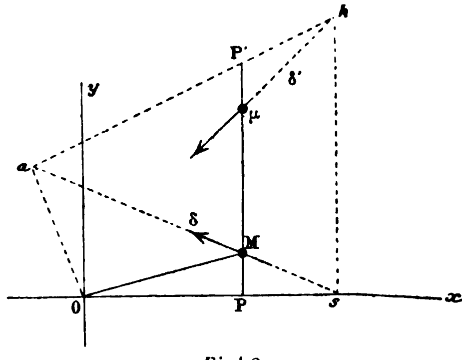


Fig. 2.

Soit (fig. 2) Ms *la tangente* δ; *la perpendiculaire élevée en* O, *à* OM, *rencontre* δ *en* a; *on prend l'isotomique de* P *sur* Mμ *et l'on trace* aP' *qui rencontre en* k *la parallèle à* Oy, *menée par* s; kμ *est la tangente cherchée.*

2. — Le problème inverse paraît plus difficile à résoudre; du moins, la solution ne se déduit pas immédiatement de la propriété que nous venons de signaler.

Mais, en nous reportant à la *fig. 1*, on voit que $\mu\mu'$ passe par la projection de A sur Ox (*) ; de cette nouvelle remarque résulte alors la construction que nous voulions obtenir ; elle est indiquée sur la *fig. 3*.

La tangente δ', *au point* μ, *droite qu'on suppose connue, coupe* ox *en* h; *la parallèle à* Oy, *menée par* h, *rencontre, en* a, *la perpendiculaire tracée par* O, *au vecteur* OM; aM *est la tangente cherchée.*

(*) En appelant H le point où $\mu\mu'$ coupe Ox, on a, en effet,

$$\frac{HP}{HQ} = \frac{\mu P}{\mu Q} = \frac{MP'}{MQ'} = \frac{AM}{AM'}; \text{ etc...}$$

3. — On peut, d'après cette remarque, simplifier la première construction; car, si δ est connue, le point a est déterminé; par suite, h; en traçant $h\mu$, on aura la tangente inconnue δ'. Mais, en effectuant le premier tracé, on aura une vérification de la construction faite, en constatant que les points h, k, dont il est question dans ces deux tracés, sont en ligne droite avec μ.

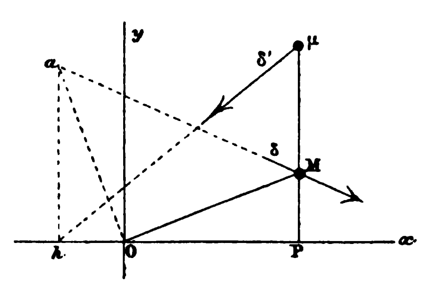


Fig. 3.

4. — Quoi qu'il en soit, il est facile de comprendre que le théorème que nous venons d'établir comporte de nombreuses applications. Supposons en effet qu'une courbe Γ soit représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$f(r, \omega) = 0.$$

On pourra toujours, en utilisant les formules connues, déduire de cette égalité l'équation de la courbe Γ en fonction de r, x; quelquefois très simplement. Soit

$$\varphi(r, x) = 0$$

l'équation ainsi obtenue. Considérons maintenant la courbe Γ' qui est représentée par

$$\varphi(y, x) = 0.$$

Si l'on sait tracer la tangente à Γ', par application du théorème précédent, on aura la tangente à Γ, ou *vice versa*. Si l'on observe qu'une courbe peut, dans beaucoup de cas, être représentée par une équation très simple en coordonnées r, x, on aperçoit immédiatement l'utilité de la transformation que nous venons d'exposer, et que nous allons appliquer à l'exemple que nous avons en vue.

5. *Application au tracé de la tangente à l'Atriphthaloïde.* — L'équation de l'*Atriphthaloïde* Γ, en coordonnées polaires, est

$$r^2(r - h) + k^3 \sec^2 \omega = 0,$$

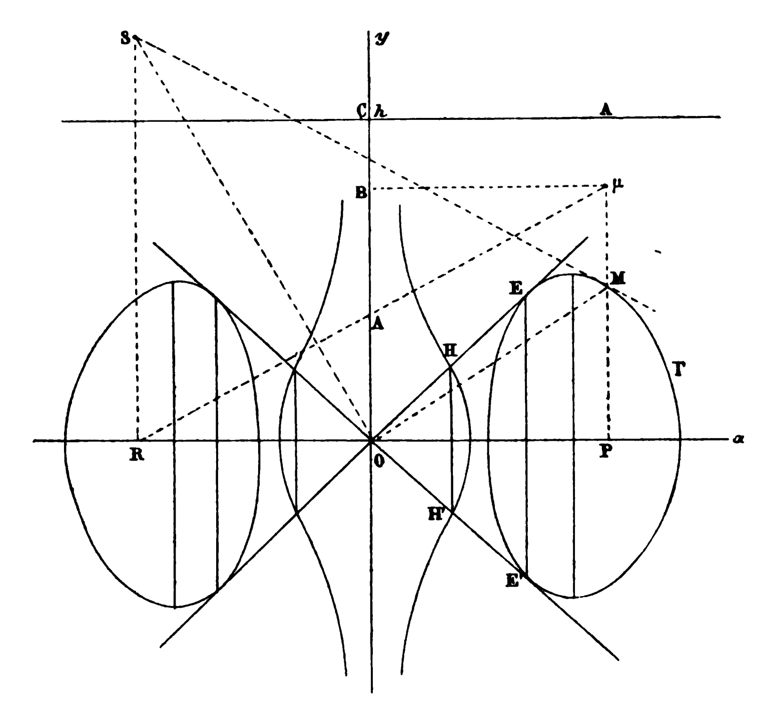
ou, dans le système r, x,

$$x^2(h - r) = k^3. \qquad (\Gamma)$$

La transformée Γ′, dans la transformation en question, est

$$x^2(h - y) = k^3. \qquad (\Gamma')$$

Cette équation représente une des *cubiques simples* (*) que nous avons étudiées dans notre *Géométrie de la règle et de*



l'équerre (p. 115); c'est *la cubique simple hyperbolique.* Nous avons indiqué *(loc. cit.)* une construction de la tangente en un point pris sur la courbe. Cette construction est la suivante.

Soit μ un point de Γ; ayant tracé la droite Δ parallèle à Ox, à la distance h, on abaisse μB perpendiculairement à Oy, et l'on prend BA = 2CB: Aμ est la tangente cherchée.

D'après cela; ayant pris un point M sur Γ, on abaisse MP perpendiculaire à Ox et l'on prend Pμ = OM. Ayant tracé μA

(*) Nous avons appelé *cubiques simples (loc. cit.)* celles qui peuvent être représentées par une équation ne renfermant que *deux termes*. Il y a trois cubiques simples correspondant respectivement aux équations

$$x^3 - ay^2 = 0, \quad x^3 - a^2y = 0. \quad x^2y = a^3.$$

comme nous venons de l'expliquer, on prolonge μA jusqu'à sa rencontre, en R, avec Ox. La parallèle à Oy, menée par R, rencontre la perpendiculaire OS au vecteur OM, en un point S; SM est la tangente à l'*Atriphthaloïde* considérée. La figure (4) représente la courbe construite dans le cas où l'on suppose

$$h > 0, \qquad k > 0, \qquad 4h^3 > 27k^3.$$

Comme l'observe M. R. Townsend, dans l'article cité, les ovales s'évanouissent quand on suppose

$$4h^3 = 27k^3.$$

ils deviennent imaginaires si l'on a

$$4h^3 < 27k^3.$$

G. L.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin.**

251. — *On considère un point* M(x_1,y_1,z_1), *son triangle podaire* $A_1B_1C_1$. *Soient* A_2, B_2 C_2 *les milieux des côtés de* $A_1B_1C_1$. *Déterminer le lieu de* M, *de manière que les droites* AA_2, BB_2, CC_2, *soient concourantes, Quel est alors le lieu de leur point de concours* P?

Soient $(y', z')(x'', z'')(x''', y''')$ les coordonnées normales de A_1, B_1, C_1, les équations de AA_2, BB_2, CC_2, sont:

$$(1) \qquad \frac{y}{z} = \frac{y'''}{z''}, \qquad \frac{z}{x} = \frac{z'}{x'''}, \qquad \frac{x}{y} = \frac{x''}{y'}.$$

La condition de concours de ces droites est:

$$(2) \qquad z'x''y''' = y'z''x'''.$$

C'est le lieu de M. On reconnaît la cubique des inverses relative à l'anticomplémentaire de l'orthocentre, déjà plusieurs fois rencontrée.

Le lieu du point de concours P, des trois droites considérées, s'obtiendra en éliminant x_1, y_1, z_1 entre les équations (1) et (2). De (1), on tire, en tenant compte de (2):

$$\sum \frac{1}{a}\left(\frac{y}{z} - \frac{z}{y}\right) = \sum \frac{1}{a}(y'y'''x''' - z'x''z'')$$

$$\frac{1}{abc}\sum a^2y'z'(x''' - x'').$$

Remplacant y', z', x''', y''', x'', z'', par leurs valeurs en x_1, y_1, z_1, on trouve:

$$abc\sum \frac{1}{a}\left(\frac{y}{z} - \frac{z}{y}\right) = \sum a^2(y_1 + x_1\cos C)(z_1 + x_1\cos B)(z_1\cos B - y_1\cos C)$$

$$= 4R^2(1 + \cos A\cos B\cos C)\sum(\cos A - \cos B\cos C)x_1(y_1^2 - z_1^2)$$

$$+ x_1y_1z_1\sum a^2(\cos^2 B - \cos^2 C).$$

La première somme est identiquement nulle, puisqu'elle représente l'équation du lieu de M; la seconde est également nulle, et on a pour l'équation du lieu de P : $\sum \frac{x}{a}(y^2 - z^2) = 0$,

qui est la cubique des inverses relative au centre de gravité, ou cubique des dix-sept points.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. d'Ocagne :

... Permettez-moi aussi de vous faire remarquer que j'ai donné (mais pour le cas de la strophoïde droite seulement) la construction de la normale que vous indiquez à la page 14 du numéro de janvier du *Journal de Mathématiques spéciales*. C'est dans ce journal même que j'ai fait connaître cette construction (année 1888, p. 204-205)...

EXERCICE ÉCRIT

65. — Des hyperboles équilatères H sont circonscrites au triangle AOB, et les axes de ces hyperboles sont parallèles aux bissectrices de AOB. En supposant les points A, B mobiles sur les droites fixes OA, OB et de telle sorte que OA + OB = h (h étant constant), on demande le lieu des foyers de H.

Notes sur l'exercice 64.

1° En prenant pour axes les droites fixes Δ, Δ', l'équation de H est

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + \frac{2xy}{\cos\theta} - \left(a + \frac{t}{a}\right)x - \left(b + \frac{t}{b}\right)y + t = 0.$$

Si l'on adopte, pour axes, les bissectrices des droites Δ, Δ', l'équation de H est alors

$$(2) \quad \frac{2}{\cos\theta}(X^2 - Y^2) - \frac{X}{\cos\frac{\theta}{2}}(a+b)\left(1 + \frac{t}{ab}\right) + \frac{Y}{\sin\frac{\theta}{2}}(a-b)\left(1 - \frac{t}{ab}\right) + 2t = 0.$$

Le lieu du centre est représenté par

$$2x(a\cos\theta - b) + 2y(a - b\cos\theta) = (a^2 - b^2)\cos\theta,$$

dans le premier système;

par

$$\frac{2X\cos\frac{\theta}{2}}{a+b} + \frac{2Y\sin\frac{\theta}{2}}{a-b} = \cos\theta,$$

dans l'autre.

En menant par les points A, B des droites inclinées à 45° sur les bissectrices OX, OY, on forme un rectangle ABCD; la diagonale CD est la droite qui correspond au lieu cherché.

2° En menant par le centre de H une parallèle à OY; puis, en éliminant entre l'équation de cette parallèle et celle de H, on trouve

$$(3)\quad X^2+Y^2+2\frac{a-b}{a+b}\,XY\cot\frac{\theta}{2}-Y\frac{(a-b)\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}-4X\frac{ab}{a+b}\cos\frac{\theta}{2}+ab\cos\theta=0.$$

On obtient une seconde conique, en considérant la parallèle à OX mené par le centre de H.

3° En calculant le discriminant Δ de l'équation (3), on trouve

$$4\Delta(a+b)^2\sin^2\frac{\theta}{2}=(\overline{a^2+b^2}\cos\theta-2ab)^2.$$

En calculant le discriminant δ des termes du second degré, dans l'équation (3), on a

$$\delta(a+b)^2\sin^2\frac{\theta}{2}=(a^2+b^2)\cos\theta-2ab.$$

On a donc, en même temps, $\Delta=0$ et $\delta=0$. La conique (3), quand elle est dégénérée, représente un système de deux droites parallèles. Cette circonstance se présente quand AB est incliné de 40° sur les axes OX, OY.

4° Le lieu demandé est une cubique ayant pour équation (dans le système yox).

$$\left(x^2+y^2+\frac{2xy}{\cos\theta}\right)\left(2-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=ax+by.$$

Les asymptotes sont en évidence. On construit facilement la courbe, en utilisant la méthode par régions; on trouvera deux formes distinctes, l'une d'elles est constituée par trois branches hyperboliques et un ovale touchant les axes Ox, Oy aux points fixes donnés A, B. Dans l'autre forme l'ovale disparaît et l'une des branches hyperboliques devient une branche serpentine.

NOTA. — Nous avons reçu de M. Barisien, trop tard pour le signaler dans le dernier numéro, une très bonne solution de l'exercice 63.

QUESTION 315

Solution par Mme Ve F. Prime, Bruxelles.

On donne une courbe plane fixe U, *un point* O *et une droite* Oz, *dans son plan.*

Soient P, Q *deux points mobiles sur* U *et tels que* Oz *soit bissectrice de l'angle* POQ; *les tangentes aux points* P, Q *se coupent en* S; OS *rencontre* PQ *en* V.

Démontrer que PQ *touche son enveloppe en un point* R *tel que*

$$\frac{RP}{RQ}=\frac{\overline{OP}^2}{\overline{OQ}^2}\cdot\frac{QV}{PV}.$$

Application. — *En considère une ellipse de centre* O; *soient* OP, OQ *deux isogonales par rapport aux axes de la courbe.*

1° *Trouver l'enveloppe de* PQ.

2° *Soit* Δ *la circonférence circonscrite au triangle* POQ. *La tangente à* Δ, *en* O, *coupe* PQ *en un point dont on demande le lieu géométrique.*

On trouve, dans les deux cas, pour représenter le lieu cherché, l'équation

$$c^2(y^2 - x^2) = a^2b^2.$$

Expliquer cette coïncidence, en appliquant le théorème en question.

(G. L.)

Si P′ et Q′ sont les positions infiniment voisines des points P et Q, positions que l'on peut supposer situées sur les tangentes SP, SQ, les angles $P\widehat{O}P'$, $Q\widehat{O}Q'$ sont égaux, et la droite PQ touche son enveloppe au point R où elle est rencontrée par la transversale P′Q′.

Dans le triangle SPQ, coupé par P′Q′,

$$\frac{PR}{QR} = \frac{PP'.SQ'}{QQ'.SP'}.$$

Posons $\widehat{P'OP} = \widehat{Q'OQ} = \alpha$, $POS = \beta$, $\widehat{SOQ} = \gamma$.

On a :

$$\frac{PP'}{SP'} = \frac{\Delta.OPP'}{\Delta.OP'S} = \frac{OP'.OP \sin \alpha}{OP'.OS. \sin(\beta + \alpha)} = \frac{OP. \sin \alpha}{OS. \sin \beta}$$

$$\frac{SQ'}{QQ'} = \frac{OS. \sin \gamma}{OQ. \sin \alpha}.$$

De là résulte :
$$\frac{PR}{QR} = \frac{OP}{OQ}.\frac{\sin \gamma}{\sin \beta}.$$

Or :
$$\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{QV. \sin V}{OQ} : \frac{PV. \sin V}{OP} = \frac{OP.QV}{OQ.PV}.$$

Ainsi :
$$\frac{PR}{QR} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OQ}^2}.\frac{QV}{PV}$$

C. Q. F. D.

Application. — Dans ce cas particulier, le point V est le milieu du segment PQ et R divise extérieurement la base PQ du triangle OPQ, dans le rapport des carrés des côtés OP, OQ; mais la tangente menée, en O, à la circonférence OPQ, divise PQ dans le même rapport, les deux lieux considérés sont donc identiques.

En posant $OP = \rho_1$, $OQ = \rho_2$, $POX = QOY = \theta$, on a:

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2},$$

et

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho_2^2} = \frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2}.$$

Les coordonnées de R sont:

$$X = \frac{\dfrac{\cos\theta}{\rho_1} - \dfrac{\sin\theta}{\rho_2}}{\dfrac{1}{\rho_1^2} - \dfrac{1}{\rho_2^2}}, \qquad Y = \frac{\dfrac{\sin\theta}{\rho_1} - \dfrac{\cos\theta}{\rho_2}}{\dfrac{1}{\rho_1^2} - \dfrac{1}{\rho_2^2}};$$

d'où

$$Y^2 - X^2 = - \frac{\cos 2\theta}{\dfrac{1}{\rho_1^2} - \dfrac{1}{\rho_2^2}};$$

et, d'après (1) et (2):

$$\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} = \cos 2\theta\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = - \frac{c^2}{a^2b^2}\cos 2\theta.$$

L'équation du lieu de R est donc:

$$c^2(Y^2 - X^2) = a^2b^2. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

ERRATUM : P. 30, formule (5), *au lieu de x, lisez* R.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 3900-2-93.

SUR LE CALCUL DES SÉRIES CONVERGENTES

(D'après Wronski.)

On doit à Wronski un procédé de calcul qui permet d'obtenir, dans un grand nombre de cas, avec une notable approximation, la valeur d'une série convergente, dont on connaît les premiers termes.

Soit $f(x) = u_0 x - u_1 x^2 + u_2 x^3 - u_3 x^4 + u_4 x^5 - \dots$ posons

$$x = \frac{y}{1 - y} = y + y^2 + y^3 + \dots,$$

nous aurons $f(x) = yu_0 - y^2 \Delta u_0 + y^3 \Delta^2 u_0 - \dots;$

ou, en remplaçant y par $\dfrac{x}{1+x}$,

$$f(x) = u_0 \frac{x}{1+x} - \Delta u_0 \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \Delta^2 u_0 \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \dots$$

donc

$$u_0 x - u_1 x^2 + u_2 x^3 \dots = u_0 \frac{x}{1+x} - \Delta u_0 \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \dots$$

pour $x = 1$,

$$u_0 - u_1 + u_2 - \dots = \frac{1}{2} u_0 - \frac{1}{4} \Delta u_0 + \dots$$

ou encore

$$u_1 - u_2 + u_3 \dots = \frac{1}{2} u_0 - \frac{1}{4} \Delta u_1 + \dots$$

ou

$$u_0 - u_1 + u_2 - \dots = u_0 - \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta u_1 - \frac{1}{8} \Delta^2 u_1 \dots$$

(Euler.)

Posons

$$s_0 = u_0, \qquad s_1 = u_0 - u_1, \qquad s_2 = u_0 - u_1 + u_2 \dots$$

et soit $\mathfrak{M} s_0 = \dfrac{1}{2}(s_0 + s_1) = u_0 - \dfrac{1}{2} u_1,$

$$\mathfrak{M} s_1 = \frac{1}{2}(s_1 + s_2), \qquad \mathfrak{M} s_2 = \frac{1}{2}(s_2 + s_3) \dots$$

$$\mathfrak{M}^2 s_0 = \frac{1}{2}(\mathfrak{M} s_0 + \mathfrak{M} s_1), \qquad \mathfrak{M}^2 s_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{M} s_1 + \mathfrak{M} s_2) \dots$$

$$\mathfrak{M}^3 s_0 = \frac{1}{2}(\mathfrak{M}^2 s_0 + \mathfrak{M}^2 s_1) \ldots \quad \text{etc.}$$

on aura
$$\mathfrak{M} s_0 = u_0 - \frac{1}{2} u_1,$$
$$\mathfrak{M}^2 s_0 = u_0 - \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta^2 u_1,$$
$$\mathfrak{M}^3 s_0 = u_0 - \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta^2 u_1 - \frac{1}{8} \Delta^3 u_2 \ldots \quad \text{etc.}$$

Voici le calcul de π, d'après Wronski :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$$

	$\mathfrak{M}^0 = s$	$\mathfrak{M}^1$	$\mathfrak{M}^2$
$1 = 0.000000$	1.000000		
$-\frac{1}{3} = 0.333333$	0.666667	0.833333	
$\frac{1}{5} = 0.200000$	0.866667	0.766667	0.800000
$-\frac{1}{7} = 4.412857$	0.723810	0.795238	0.780952
$\frac{1}{9} = 0.111111$	0.834921	0.779365	0.787301
$-\frac{1}{11} = 0.090909$	0.744012	0.789466	0.784415
$\frac{1}{13} = 0.076923$	0.820935	0.782473	0.785969
$-\frac{1}{15} = 0.066667$	0.754268	0.787601	0.785037
$\frac{1}{17} = 0.058824$	0.813092	0.783680	0.785460
$-\frac{1}{19} = 0.052632$	0.760460	0.786776	0.785228
$\frac{1}{21} = 0.047690$	0.808150	0.784305	0.785540

$$\frac{\pi}{4} = 0.785397 \quad \text{en continuant.}$$

AIRES DES HYPOCYCLOIDES

A TROIS OU QUATRE REBROUSSEMENTS

Par M. **F. Balitrand**, ancien élève de l'École Polytechnique.

Hypocycloïde à trois rebroussements. — Soient A, B, C les points de rebroussement de l'hypocycloïde; A′, B′, C′ les sommets; nous allons évaluer l'aire du triangle curviligne

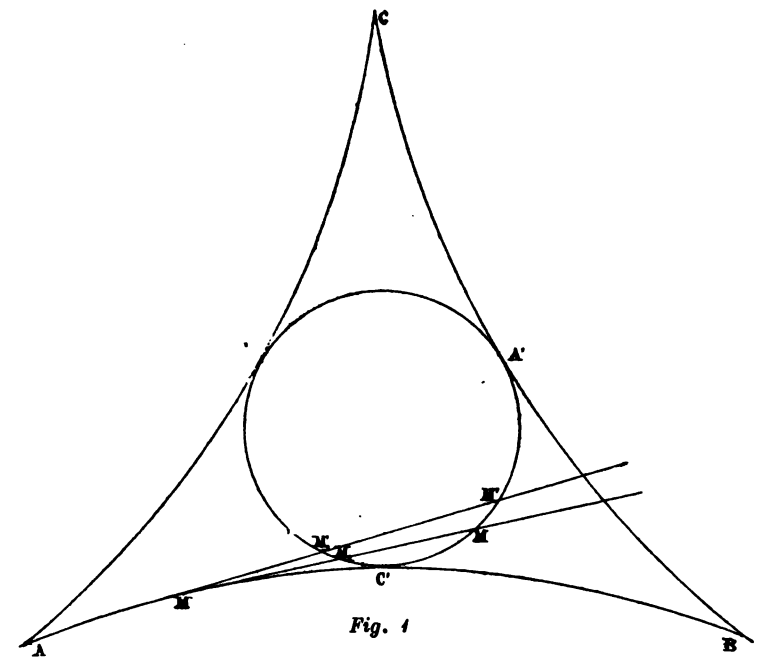


Fig. 1

AB′C′, formé par deux branches de l'hypocycloïde et l'arc B′C du cercle tritangent à la courbe.

Soient $MM_1\mu$, $MM'_1\mu'$ deux positions infiniment voisines d'une tangente. On sait que

$$MM_1 = M_1\mu.$$

Posons $\qquad MM_1 = x, \quad M_1MM'_1 = d\theta.$

L'aire du triangle $MM_1M'_1$ est égale à $\frac{1}{2}x^2d\theta$; et l'aire σ du secteur curviligne AB'C' est donnée par l'intégrale

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2d\theta \cdot$$

Pour évaluer cette intégrale, considérons l'aire $M_1M'_1\mu\mu'$. Elle est égale à $\frac{1}{2}(2x)^2d\theta - \frac{1}{2}x^2d\theta = \frac{3}{2}x^2d\theta$.

L'aire du cercle A'B'C' égale à πR^2, est exprimée, d'autre part, au moyen de l'intégrale

$$\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2d\theta.$$

Donc

$$\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2d\theta = \pi R^2$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2d\theta = \frac{\pi R^2}{3}.$$

L'aire S de l'hypocycloïde est donc

$$S = 2\pi R^2.$$

Hypocycloïde à quatre rebroussements. — Nous allons procéder comme dans le cas précédent.

L'aire du triangle $MM_1M'_1$ *(fig. 6)* est égale à $\frac{1}{2}x^2d\theta$; et l'aire σ du triangle curviligne BA'B' est donnée par l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2d\theta = \sigma.$$

Pour évaluer cette intégrale, considérons l'aire $M_1M'_1\mu\mu'$; d'après les propriétés, connues, de l'hypocycloïde, $M_1\mu = 2MM_1$. Par suite, l'aire $M_1M'_1\mu\mu'$ est égale à

$$\frac{1}{2}(3x)^2d\theta - \frac{1}{2}x^2d\theta = 4x^2d\theta.$$

L'aire du cercle inscrit à la courbe, égale à πR^2, est exprimée par l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x^2d\theta = \pi R^2.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2d\theta = \frac{\pi R^2}{8}.$$

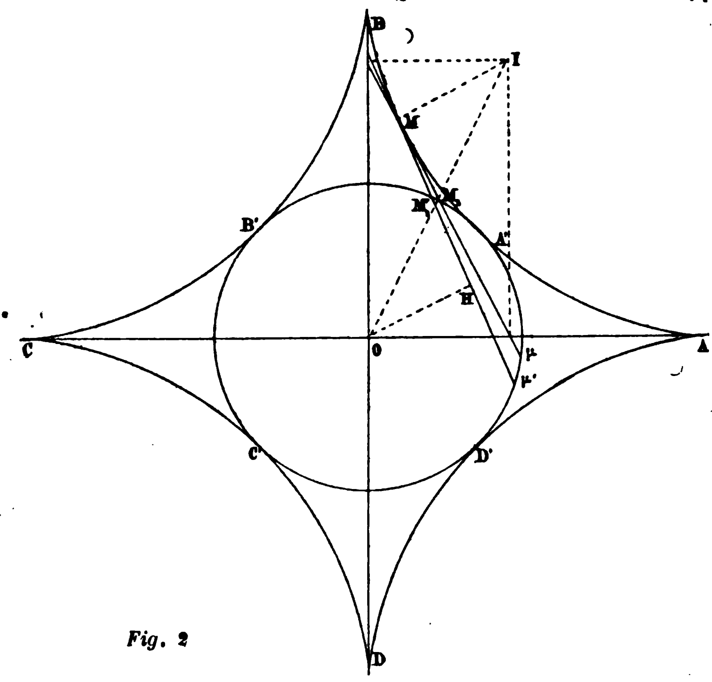


Fig. 2

L'aire S de l'hypocycloïde est, par suite,

$$S = \frac{3\pi R^2}{2}.$$

POINTS A L'INFINI SUR CERTAINES DROITES

Par M. **Poulain**, à Angers.

M. Bernès a indiqué récemment (*J. S.* 1892, p. 245) les coordonnées des points à l'infini d'une droite $Q = 0$, quand elle fait, avec une droite donnée $P = 0$, un angle donné V, à $K\pi$ près. Le résultat renferme les coordonnées des points cycliques. Voici deux autres expressions où n'entrent que les coefficients de la droite $P \equiv l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$, les coordonnées étant barycentriques.

Les points à l'infini de $Q = 0$ sont

(1) $\alpha' : \beta' : \gamma' = [a(al - bm\cos C - cn\cos B) + 2S(m-n)\cot V] : \ldots$

(2) ou $\alpha' : \beta' : \gamma' = [(l-n)\cot B + (l-m)\cot C + (m-n)\cot V] : \ldots$

En effet, menons par A une parallèle à $Q = o$. Son équation est de la forme

(3) $$m'\beta + n'\gamma = o.$$

Comme elle fait l'angle V avec la première on a

(4) $$\operatorname{tg} V = \frac{2S \begin{vmatrix} 1 & l & o \\ 1 & m & m' \\ 1 & n & n' \end{vmatrix}}{b^2mm' + c^2nn' - bc(mn' + nm')\cos A + caln'\cos B - ablm'\cos C}.$$

Il est facile d'éliminer m' et n' entre (3) et (4). On trouve ainsi $\frac{\beta'}{\gamma'}$ de la formule (1) et, en éliminant a, on passe à (2).

Ayant les valeurs (1) et (2), il est facile d'écrire l'équation de la seconde droite, $Q = o$, quand elle passe par un autre point donné. Mais il y a avantage à écrire les équations de certaines droites particulières, de même direction que $Q = o$.

Ces équations particulières sont

(5) $$\sum \alpha[(m - n)\cot A - l\cot V] = o,$$

(6) $$\sum \alpha[(l - m)b^2 + (n - l)c^2 + 4Sl\cot V] = o.$$

On les vérifie, en cherchant les points qui sont à l'infini sur ces droites. En ajoutant $K(\alpha + \beta + \gamma)$, K étant une indéterminée, on aura l'équation générale des droites $Q = o$.

Pour $V = \frac{\pi}{2}$, on a des perpendiculaires et alors la droite (5) passe par l'orthocentre et par son factorien (l tg A,...).

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu, de M. P. Delens, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Rouen, la lettre suivante que nous publions parce qu'elle nous semble renfermer d'intéressantes réflexions.

« En feuilletant dernièrement l'année 1890 du *Journal de Mathématiques spéciales*, j'y ai trouvé, à propos de l'exercice 33 sur le lieu des foyers des coniques circonscrites à un losange, une note faisant remarquer la contradiction qui semble exister entre le degré de ce lieu et celui qui est indiqué par la théorie générale de Chasles. Voici, il me semble, comment on peut expliquer les résultats obtenus, et faire disparaître cette contradiction apparente.

» On sait que les points à l'infini du lieu des foyers d'un système de coniques sont fournis par les paraboles du système qui doivent être regardées comme admettant trois foyers sur la droite de l'infini, à savoir : le point de rencontre de cette droite avec l'axe de la parabole et les points I et J; ce qui montre en même temps que le lieu des foyers est en général de degré 3ν et admet I et J pour points multiples d'ordre ν.

» Mais on suppose que les paraboles du système ne se décomposent pas en droites; car on sait qu'un système de deux droites parallèles doit être considéré comme ayant tous ses foyers situés sur la droite de l'infini; ce fait résulte de la discussion du problème des foyers dans les coniques.

» On doit donc, dans ce cas, s'attendre à voir la droite de l'infini figurer dans le lieu des foyers autant de fois qu'il y a de paraboles du sytème se décomposant en droites parallèles distinctes; et, par suite, le degré du lieu doit s'abaisser d'un nombre correspondant d'unités.

» C'est précisément ce qui se présente pour les coniques circonscrites à un parallélogramme (ou à un losange); et le lieu complet peut bien encore, avec cette explication, être regardé comme étant du 6e degré et passant deux fois par les points I et J.

» Comme autre vérification, on peut considérer les coniques circonscrites à un trapèze; le lieu de leurs foyers s'abaisse au 5e degré, et la courbe obtenue ne passe qu'une fois par les points cycliques. Dans le cas particulier où le trapèze est isoscèle (et par suite inscriptible), le lieu doit se décomposer. Il est en effet formé d'une cubique circulaire et de l'axe du trapèze compté deux fois, ce qui constitue encore une courbe du 5e degré, et s'accorde avec les résultats connus.

On peut prévoir, de la même manière, le degré et la nature du lieu des foyers des hyperboles qui passent par deux points donnés A et B et ont leurs asymptotes parallèles à deux droites données D et D'. Ces coniques passent en effet par quatre points fixes; le lieu de leurs foyers devrait être à priori du 6e degré ; mais comme les deux paraboles du faisceau sont ici formées par la droite AB et la droite de l'infini, le lieu doit contenir deux fois cette dernière droite et s'abaisser par suite au 4e degré (et non au 2e degré, comme le dit Kœhler dans son recueil de problèmes, p. 107); de plus, toutes les coniques du faisceau ayant leurs axes parallèles, on sait que le lieu des foyers doit se décomposer. Ainsi ce lieu sera formé de deux coniques qui devront se couper à angle droit aux points de rencontre des parallèles à D et à D', menées par A et B, et qui seront homofocales. On le vérifie sans peine par le calcul et par la géométrie.

» Si l'on considère maintenant, comme autre exemple, les coniques tangentes à deux droites données en deux points donnés, le lieu s'abaisse au 3e degré et représente une strophoïde. Il était facile de le prévoir : le faisceau des coniques ne renferme en effet, dans ce cas, qu'une parabole, en dehors de la droite double des contacts, qui doit être laissée de côté, puisque, d'après la théorie générale, les foyers d'une droite double sont complètement indéterminés. — Le lieu doit donc être du 3e degré seulement et admettre, pour directions asymptotiques, les directions isotropes et la direction asymptotique de la parabole; il doit de plus admettre, pour point double, le point de concours des tangentes données (qui forment une conique particulière du faisceau dont les quatre foyers sont réunis en ce point), et les bissectrices de ces droites pour tangentes; ce qui suffit à caractériser une strophoïde.

» Il en est encore de même, pour des raisons analogues, dans le cas des coniques ayant leurs quatre points communs confondus en un point donné.

» Enfin, si l'on considère toutes les coniques tangentes à deux droites *parallèles*, en deux points donnés, le lieu de leurs foyers doit s'abaisser au 2e degré, car l'une des paraboles du faisceau se réduit à deux droites parallèles, et l'autre à deux

droites confondues; c'est ce qu'on vérifie facilement par le calcul qui donne, dans ce cas, pour le lieu cherché une hyperbole équilatère.

» On voit bien maintenant, par ces divers exemples, comment il faudra modifier, dans chaque cas particulier, la formule générale qui donne le degré d'un lieu de foyers.

» Il n'est peut-être pas inutile de montrer cependant qu'on peut, par une discussion semblable, trouver le degré du lieu des foyers d'un système de *paraboles* assujetties à trois conditions. — Dans ce cas, chacune des courbes ne doit plus, évidemment, être regardée que comme admettant un seul foyer, donné par l'intersection des deux droites auxquelles se réduisent les hyperboles focales. D'ailleurs, ces droites étant rectangulaires, le foyer ne pourra disparaître à l'infini que si l'une, au moins, s'éloigne à l'infini. Ceci a lieu quand la parabole correspondante se décompose en un système de deux droites parallèles, ou si elles deviennent parallèles, ce qui exige que leur direction commune soit celle d'une droite isotrope; la parabole correspondante admet alors également son axe parallèle à une direction isotrope, c'est-à-dire qu'elle est tangente à la droite de l'infini en l'un des points cycliques. On pourra donc trouver encore par ce procédé les points à l'infini du lieu et son degré dans chaque cas particulier, les paraboles formées de deux droites confondues devant être, comme dans le premier cas, laissées de côté dans cette recherche.

» Il serait facile de vérifier ces résultats sur des exemples; mais ce serait allonger inutilement cette explication que je me permets de vous soumettre pour le cas, d'ailleurs assez peu probable, où il n'aurait pas été répondu à la question posée à ce sujet dans votre journal. Si je vous l'envoie quand même, c'est que la méthode analytique que j'ai employée, et qui n'est peut-être pas celle qu'on indique le plus souvent pour trouver le degré des lieux de foyers, me paraît avoir l'avantage, au point de vue de l'enseignement, de reposer uniquement sur une discussion complète du problème de la recherche des foyers, de montrer aux élèves l'importance de cette dis-

cussion et comment l'explication des résultats qu'ils rencontrent en découle naturellement. Ils peuvent d'aileurs appliquer la même méthode à d'autres problèmes; pour les lieux de sommets, par exemple... »

A propos de la transformation que nous avons indiquée dans le numéro précédent (p. 64 et suivantes) nous avons reçu les deux lettres que nous publions ici. La première était signée d'un nom que nous n'avons pu déchiffrer; la seconde est de notre zélé collaborateur M. *M. d'O.*

L'intéressante méthode de transformation que vous exposez dans le numéro de mars du *Journal de Mathématiques spéciales* semble susceptible d'une interprétation géométrique simple.

Si, les axes étant rectangulaires :

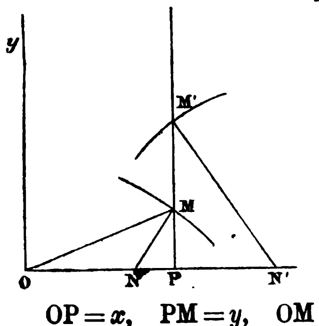
$$y = 0 \qquad f(z, x) = 0$$

sont les équations d'une courbe C, l'équation de la projection C' sur le plan des xy de la section par le plan $z = x$ de la surface de révolution engendrée par la rotation de C autour de oz sera :

$$f(x, \sqrt{x^2 + y^2}) = 0.$$

Réciproquement, étant donnee la courbe C' dans le plan des xy, si on fait tourner autour de oz la courbe située dans le $z = x$ et projetée suivant C', la méridienne de la surface de révolution engendrée sera la courbe C.

On pourrait, je crois, développer facilement les conséquences de cette interprétation; on pourrait même s'en servir pour généraliser la transformation, mais sans arriver peut-être à des conséquences bien intéressantes.



... La transformation que vous proposez consiste à prendre, sur l'ordonnée du point M, le point M' tel que

$$PM' = OM.$$

Soient MN et M'N' les normales à la courbe donnée et à sa transformée, en M et en M'. Posons, *en tenant compte du signe,*

$$OP = x, \quad PM = y, \quad OM = PM' = \rho, \quad ON = n, \quad PN' = n'.$$

Puisque $\rho^2 = x^2 + y^2$, on a

$$\rho \frac{d\rho}{dx} = x + y \frac{dy}{dx} = n.$$

Donc

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{n}{\rho}.$$

La courbe transformée donne

$$\frac{d\rho}{dx} = \operatorname{tg} \mathrm{PM'N'} = \frac{n'}{\rho}.$$

Par suite, $n = n'$.

Si donc on connaît la normale MN, on a la normale M'N' en prenant PN' = ON, *et vice versâ.*

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin.**

252. — *Lieu des points de contact des tangentes menées parallèlement à une direction donnée, aux coniques passant par quatre points fixes.*

Prenons trois des points comme sommets du triangle de référence, et soient x', y', z' les coordonnées normales du quatrième point.

Si (1)

$$\frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{y} + \frac{\nu}{z} = 0$$

est l'équation des coniques, on a :

(2)

$$\frac{\lambda}{x'} + \frac{\mu}{y'} + \frac{\nu}{z'} = 0.$$

Soit

$$lx + my + nz = 0,$$

la direction donnée. La condition de parallélisme de cette droite et de la tangente en x, y, z à la conique est :

$$\sum a[m(\lambda y + \mu x) - n(\lambda z + \nu x)] = 0;$$

ou, en posant pour abréger :

$$am - bl = \mathrm{C}, \qquad cl - an = \mathrm{B}, \qquad bn - cm = \mathrm{A},$$

(3)

$$\sum \lambda(\mathrm{C}y + \mathrm{B}z) = 0.$$

L'équation du lieu résulte de l'élimination de λ, μ, ν entre (1) (2) (3).

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{x'} & \frac{1}{y'} & \frac{1}{z'} \\ \mathrm{C}y + \mathrm{B}z & \mathrm{A}z + \mathrm{C}x & \mathrm{B}x + \mathrm{A}y \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\sum xx'(\mathrm{C}z'y^2 - \mathrm{B}y'z^2) = 0.$$

Équation d'une cubique passant par les quatre points fixes donnés.

Elle rentre dans le type des cubiques des inverses relatives à un point donné, si

$$Ax' = By' = Cz'.$$

Elle est alors la cubique des inverses relative au point (x', y', z').

253. — *On considère un triangle* ABC, *deux points* M *et* P. *soient* A′, B′, C′, A″, B″, C″, *les pieds des droites* AM..., AP...; *Soient* A_1, B_1, C_1, *les milieux de* AA′, BB′, CC′. *Condition de concours des droites :* A_1A'', B_1B'', C_1C'' ?

Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, les coordonnées barycentriques de M et P; on a pour les coordonnées de A_1.

$$\frac{\alpha}{\beta_1 + \gamma_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1},$$

d'où, pour l'équation de A_1A'' :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ o & \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_1 + \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = o.$$

La condition pour les trois droites analogues soient concourantes, est ;

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2}{\beta_1 + \gamma_1} & \gamma_2 & -\beta_2 \\ -\gamma_2 & \dfrac{\gamma_2\alpha_1 - \gamma_1\alpha_2}{\alpha_1 + \gamma_1} & \alpha_2 \\ \beta_2 & -\alpha_2 & \dfrac{\alpha_2\beta_1 - \beta_2\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} \end{vmatrix} = o,$$

qui se réduit, tous calculs faits, à

$$(1) \qquad \sum \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\beta_2^2 - \gamma_2^2) = o.$$

D'où l'on conclut que :

Si M est fixe, P doit appartenir à la cubique des réciproques relative à M_0, réciproque de M.

Si P est fixe, M doit appartenir à la conique circonscrite au triangle de référence qui est la transformée par points réciproques de PP_0 (P_0 réciproque de P).

Les applications sont très nombreuses.

Si $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2$, (1) est toujours remplie, A″, B″, C″ sont les milieux des côtés, le point de concours des droites considérées est alors le milieu de la distance des brocardiens de M (voir *J. M. E.*, ex. divers, numéro 219).

(1) est encore vérifiée, si P et M sont réciproques, c'est-à-dire si

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 = \gamma_1\gamma_2.$$

Dans ce cas, comme on s'en rend compte géométriquement, le point de concours des droites considérées est toujours le centre de gravité du triangle de référence.

254. — *Soit un triangle* ABC, *deux points* M, P, *dont les coordonnées barycentriques sont :* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)(\alpha', \beta', \gamma')$. *Par* M, *on mène les parallèles* MA′, MB′, MC′, *à* PA, PB, PC, *et rencontrant*

respectivement les côtés de ABC, *en* A′, B′, C′. *A quelles conditions doivent satisfaire* M *et* P *pour que les droites* AA′, BB′, CC′ *soient concourantes ?*

On trouve aisément pour l'équation de AA′ en coordonnées barycentriques :

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta'(\alpha_1 + \beta_1) + \beta_1\gamma'}{\gamma'(\alpha_1 + \gamma_1) + \gamma_1\beta'};$$

et deux autres analogues pour BB′, CC′ ; d'où, pour la relation cherchée :

$$(\beta'\alpha_1 + \beta'\beta_1 + \gamma'\beta_1)(\gamma'\beta_1 + \gamma'\gamma_1 + \alpha'\gamma_1)(\alpha'\gamma_1 + \alpha'\alpha_1 + \beta'\alpha_1)$$
$$= (\gamma'\alpha_1 + \gamma'\gamma_1 + \beta'\gamma_1)(\alpha'\beta_1 + \alpha'\alpha_1 + \gamma'\alpha_1)(\beta'\gamma_1 + \beta'\beta_1 + \alpha'\beta_1),$$

ou

$$(1) \qquad \sum \alpha' (\beta_1 + \gamma_1 - \alpha_1)[\gamma'^2\beta_1(\alpha_1 + \gamma_1) - \beta'^2\gamma_1(\alpha_1 + \beta_1)] = 0.$$

On peut remarquer que cette relation ne change pas quand on permute α', β', γ' et α_1, β_1, γ_1 ; il en résulte que si on considère M comme fixe, le lieu de P est la cubique (1). Si on considère P comme fixe, le lieu de M est la même cubique.

Application : Si P est l'orthocentre H, le lieu de M est la cubique, si souvent rencontrée, des inverses relative à l'anticomplémentaire de l'orthocentre. Si M est l'orthocentre, le lieu de P est la même cubique. On a donc la proposition suivante :

Si P *est un point de la cubique des inverses relative à l'anticomplémentaire de l'orthocentre* H, *et que par* H, *on mène les parallèles* HA′, HB′, HC′ *à* PA, PB, PC, A′, B′, C′ *étant respectivement situés sur les côtés de* ABC; *les droites* AA′, BB′, CC′ *sont concourantes.*

EXERCICE ÉCRIT

66. — Le lieu des points tels qu'en menant les trois normales à une parabole donnée, le produit des longueurs de ces trois normales, divisé par le produit des rayons de courbure des pieds des normales, soit constant, est une conique.

Pour quelle valeur de la constante, la conique se décompose-t-elle en deux droites ? *(E. N. Barisien.)*

Note sur l'exercice 65.

En prenant les droites OA, OB pour axes de coordonnées et en posant $OA = 2a$, $OB = 2b$, on trouve pour l'équation générale des hyperboles du réseau proposé

$$\text{(H)} \qquad f = x^2 + y^2 + \frac{2xy}{\cos\theta} - 2ax - 2by = 0.$$

Soit F(α, β) un foyer de cette courbe ; de F, abaissons des perpendi-

culaires FP, FQ sur les asymptotes de (H) (*). En identifiant PQ avec la polaire de F relativement à (H), on trouve que (avec les notations ordinaires) les coordonnées du foyer F vérifient l'équation

$$f + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

résultat qu'on démontre d'ailleurs directement et très simplement.

Finalement, le lieu est une ellipse correspondant à l'équation

$$(1)\quad (x^2 + y^2)\left(1 + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 2xy\left(\cos\theta - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) - 2h(x+y)\cos\theta = \frac{4h^2\cos^2\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

et une droite représentée par

$$2(x+y)\cos^2\frac{\theta}{2} - h\cos\theta = 0.$$

NOTA. — M. BARBARIN nous a adressé une solution de l'exercice 65. Dans cette solution, M. Barbarin prend pour axes les bissectrices des droites proposées, il trouve, pour la conique (1), l'équation suivante

$$X^2 + 2Y^2 + 2dX - d^2 = 0,$$

en posant

$$d = \frac{h\cos 2\theta}{4\cos\theta}.$$

QUESTIONS 187, 188 ET 189

Solution par M. H. BROCARD.

187. *Construire la courbe représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation*

$$y = \log x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

les logarithmes étant pris dans le système népérien.

188. *Même question, l'équation de la courbe étant*

$$y = \log x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right). \qquad \text{(S. Realis.)}$$

Désignons ces deux courbes respectivement par V_1 et V_2.

Traçons les courbes auxiliaires représentées par

L $\qquad y = \log x,$

C $\qquad y = \operatorname{cotg} x,$

puis les courbes

(*) On a souvent à considérer la droite μ qui passe par les pieds des perpendiculaires abaissés d'un point M sur deux droites Δ, Δ'. On pourrait, pour abréger le langage, dire que μ est la *podaire* de M. A un point M, correspond une droite μ; et réciproquement.

$\Lambda \qquad y = -\log x,$

$\Gamma \qquad y = -\operatorname{cotg} x,$

symétriques des précédentes, par rapport à OX.

Soient, respectivement,

A_n les zéros des courbes C, Γ $\left[A_n = (2K + 1)\frac{\pi}{2}\right]$;

B_n les intersections des courbes C, L;

D_n les intersections des courbes C, Λ;

E_n les intersections des courbes Λ, Γ;

F_n les intersections des courbes C, Γ;

G_n les points de la courbe L ayant pour abscisses A_n;

H_n les abscisses des points D_n, F_n;

K_n les abscisses des points B_n, E_n;

OY l'asymptote des courbes L, Λ.

$n\pi$ les abscisses des asymptotes des courbes C, Γ.

Les ordonnées positives F_nH_n, B_nK_n, étant doublées, soient M_n, P_n leurs extrémités.

On remarquera immédiatement les propriétés suivantes, qui suffisent à la détermination complète des courbes V_1, V_2 :

1° Les courbes V_1, V_2 admettent pour asymptotes celles des courbes L, C, Λ, Γ, c'est-à-dire OY et $\omega = n\pi$.

2° La courbe V_1 rencontre L aux points G_n, OX aux points H_n et passe par les points P_n.

3° La courbe V_2 rencontre L aux points G_n, OX aux points K_n et passe par les points M_n.

4° Les courbes V_1, V_2 sont toujours au-dessus des arcs correspondants des courbes C, Γ.

La forme des courbes V_1, V_2, offre une certaine analogie, pour le tracé, avec celle des courbes C, Γ. Chacune de leurs branches possède un point d'inflexion.

Les courbes V_1, V_2, n'ont aucun point du côté des x négatifs.

189. *Construire les courbes représentées par l'équation*

$$y = \frac{\log x + tg\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right)}{\log x + tg\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)},$$

où les signes se correspondent. (S. Realis.)

Désignons par U_1 et U_2 les deux courbes correspondant, respectivement, aux signes supérieurs et inférieurs, et conservons les notations précédentes.

Nous aurons :

$$U_1 = \frac{V_1}{V_2}, \qquad U_2 = \frac{V_2}{V_1}.$$

La discussion des courbes V_1, V_2 donnera les éléments du tracé des courbes U_1, U_2.

En effet, considérons d'abord la courbe U_1 et menons les droites Δ_1, Δ_2 parallèles à OX et aux distances 1 et -1.

On reconnaîtra immédiatement les propriétés suivantes :

1° Les zéros de U_1 sont ceux de V_1, ou les points H_n.

2° U_1 rencontre Δ_1 aux points R_n d'intersection de Δ_1 avec les ordonnées des points G_n, qui ont par conséquent pour abscisses A_n.

3° U_1 rencontre Δ_2 aux points S_n d'intersection de Δ_2 avec les parallèles à OY ayant pour abscisses $n\pi$.

4° U_1 est infini positif et asymptote aux parallèles à OY ayant pour abscisses K_n.

5° La même branche, passant de l'autre côté de OX, est asymptote à la parallèle à OY ayant pour abscisse le point K_{n+1} suivant.

Considérons enfin la courbe U_2. On la déduira immédiatement de U_1 en observant que U_2 a les mêmes points $y = 1$ ou R_n; que U_2 a pour asymptotes les ordonnées des points M_n qui ont pour abscisses H_n, et, enfin, que le signe de U_2 est le même que celui de la branche de U_1 correspondante.

La discussion des courbes U_1 et U_2 dans l'intervalle de o à π n'offre pas de difficultés.

Quant au tracé des courbes U et V, nous croyons qu'il donnera le sujet d'un exercice utile aux élèves, des questions tout à fait analogues à celles-ci pouvant leur être posées aux examens.

QUESTION 74

Solution par M. E. N. Barisien.

On décrit une conique, osculatrice à une conique donnée, en un point P, *et passant par les foyers* F *et* F′. *Démontrer que les tangentes en* F *et* F′ *se coupent au centre du cercle osculateur en* P.

(Koehler.)

La conique osculatrice dont il s'agit ne peut avoir que trois points confondus en son point de contact avec la conique donnée : par suite, la seconde sécante d'intersection de ces deux coniques passe par le point de contact. Il en résulte que si

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

est l'équation de la conique donnée ; et que, si φ est l'angle excentrique du point de contact P, l'équation de la conique osculatrice en P est

$$(1)\quad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + [bx \cos\varphi + ay \sin\varphi - ab] [\lambda(x - a\cos\varphi) + \mu\,(y - b\sin\varphi)] = 0.$$

Exprimons que cette conique passe par les foyers F et F′. L'équation (1) doit être vérifiée par $y = 0$, $x = c$, et par $y = 0$, $x = -c$; ce qui donne les deux relations

$$\lambda(a\cos\varphi - c) + \mu b \sin\varphi = \frac{b^3}{a - c\cos\varphi},$$

$$\lambda(a\cos\varphi + c) + \mu b \sin\varphi = \frac{b^3}{a + c\cos\varphi}.$$

On en déduit

$$(2)\quad \lambda = -\frac{b^3\cos\varphi}{a^2 - c^2\cos^2\varphi} \qquad \mu = \frac{ab^2\,(1 + \cos^2\varphi)}{\sin\varphi\,(a^2 - c^2\cos^2\varphi)}.$$

Cherchons les cordonnées (α, β) du pôle de FF′ (c'est-à-dire de l'axe des x) par rapport à la conique (1).

On sait que, pour l'équation générale d'une conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

le pôle (α, β) de l'axe des x est donné par les équations

$$(3)\quad \begin{cases} A\alpha + B\beta + D = 0, \\ D\alpha + E\beta + F = 0. \end{cases}$$

Or, pour la conique (1), on a

$$(4)\quad A = b^2 + b^2\lambda\cos\varphi = \frac{a^2b^2\sin^2\varphi}{a^2 - c^2\cos^2\varphi},$$

$$(5)\quad B = \frac{1}{2}\,(a\lambda\sin\varphi + b\mu\cos\varphi) = \frac{ab^3\cos^3\varphi}{\sin\varphi\,(a^2 - c^2\cos^2\varphi)},$$

(6) $C = a^2 + a\mu \sin\varphi = \dfrac{a^2(2b^2 + a^2\sin^2\varphi)}{a^2 - c^2\cos^2\varphi}$,

(7) $D = -\dfrac{1}{2}[b\cos\varphi(\lambda a\cos\varphi + \mu b\sin\varphi) + ab\lambda] = 0$,

(8) $E = -\dfrac{1}{2}[a\sin\varphi(\lambda a\cos\varphi + \mu b\sin\varphi) + ab\mu] = -\dfrac{a^2b^2}{\sin\varphi(a^2 - c^2\cos^2\varphi)}$,

(9) $F = ab(\lambda a\cos\varphi + \mu b\sin\varphi) - a^2b^2 = -\dfrac{a^2b^2c^2\sin^2\varphi}{a^2 - c^2\cos^2\varphi}$.

Les équations (3) deviennent alors

$$A\alpha + B\beta = 0, \qquad E\beta + F = 0.$$

Donc $\beta = -\dfrac{F}{E}$, $\alpha = -\dfrac{B}{A}.\beta$

En tenant compte : 1° de (8) et (9), 2° de (4) et (5), on a

$$\beta = -\frac{c^2}{b}\sin^2\varphi, \qquad \alpha = \frac{c^2}{a}\cos^2\varphi.$$

Ainsi α, β sont les coordonnées du centre du cercle osculateur en P.

QUESTION 317

Solution par M. E.-N. Barisien.

On donne deux droites rectangulaires OX, OY *et deux points* P, Q. *On mène, par* P, *deux droites coupant* OX, OY *en quatre points* A, B, C, D. *Comment faut-il mener ces droites pour que les cinq points* A, B, C, D, Q *appartiennent à une même hyperbole équilatère?*

Trouver le lieu du centre de cette hyperbole. (Neuberg.)

Soient α, β les coordonnées du point P; α', β' celles du point Q. Désignons par m le coefficient angulaire de la droite PAB, et par m' celui de la droite PCD.

L'équation générale d'une conique passant par A, B, C, D est

(1) $[y - \beta - m(x - \alpha)][y - \beta - m'(x - \alpha)] + \lambda xy = 0$.

La condition pour que cette conique soit une hyperbole équilatère est

(2) $mm' = -1$.

Par conséquent, les droites PAB et PCD doivent être rectangulaires.

La condition imposée à l'hyperbole de passer par Q semble surabondante, puisque quatre points déterminent une hyper-

bole équilatère. Mais les points A, B, C, D, formant un *groupe orthocentrique*, il y a une infinité d'hyperboles équilatères passant par ces quatre points. L'équation (1) devient, en tenant compte de (2),

$$(y-\beta)^2-(x-\alpha)^2-(m+m')(x-\alpha)(y-\beta)+\lambda xy=0.$$

En posant $m+m'=\mu$, l'équation générale de l'hyperbole équilatère passant par A, B, C, D est

$$(3)\quad (y-\beta)^2-(x-\alpha)^2-\mu(x-\alpha)(y-\beta)+\lambda xy=0.$$

Les équations du centre sont

$$(4)\qquad 2(y-\beta)-\mu(x-\alpha)+\lambda x=0,$$

$$(5)\qquad -2(x-\alpha)-\mu(y-\beta)+\lambda y=0.$$

La courbe (3) passant par Q, on a

$$(6)\quad (\beta-\beta')^2-(\alpha-\alpha')^2-\mu(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')+\lambda\alpha'\beta'=0.$$

L'élimination de λ et μ entre (4) (5 et (6) conduit immédiatement à l'équation du lieu des centres :

$$\begin{vmatrix} 2(y-\beta) & x-\alpha & x \\ -2(x-\alpha) & y-\beta & y \\ (\beta-\beta')^2-(\alpha-\alpha')^2 & (\alpha-\alpha')(\beta-\beta') & \alpha'\beta' \end{vmatrix}=0.$$

Cette équation, développée, devient

$$\begin{aligned}&2(x^2+y^2)(\alpha'\beta+\alpha\beta'-\alpha\beta)\\ &\quad -x[4\alpha\alpha'\beta'-2\alpha(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')-\beta(\beta-\beta')^2+\beta(\alpha-\alpha')^2]\\ &\quad -y[4\beta\alpha'\beta'-2\beta(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')+\alpha(\beta-\beta')^2-\alpha(\alpha-\alpha')^2]\\ &\qquad\qquad +2\alpha'\beta'(\alpha^2+\beta^2)=0.\end{aligned}$$

C'est une circonférence passant par le point P.

Si
$$\frac{\alpha'}{\alpha}+\frac{\beta'}{\beta}=1,$$

c'est-à-dire si le point Q se trouve sur la droite qui unit les projections du point P sur les axes de coordonnées, le lieu devient la ligne droite représentée par

$$\begin{aligned}&x[2\alpha\alpha'\beta'-\beta(\beta-\beta')^2+\beta(\alpha-\alpha')^2]\\ &\qquad +y[2\beta\alpha'\beta'+\alpha(\beta-\beta')^2-\alpha(\alpha-\alpha')^2]-2\alpha'\beta'(\alpha^2+\beta^2)=0.\end{aligned}$$

Remarque. — Les segments OA, OB, OC, OD ont pour expressions :

$$OA=\frac{m\alpha-\beta}{m},\qquad OB=\beta-m\alpha.$$

$$OC=\frac{m'\alpha-\beta}{m},\qquad OD=\beta-m'\alpha.$$

On a donc, puisque $mm' = 1$, la relation

$$OA.OC = -OB.OD.$$

On sait en effet que si deux droites rectangulaires, issues de O, coupent une hyperbole équilatère en quatre points A, C; B, D, on a

$$-OA.OC = OB.OD.$$

Ce théorème est très connu (v. la première question posée au concours de l'École Polytechnique l'an dernier; *Journal* 1892, p. 186).

QUESTION 49 (*)

Solution par M. E. N. BARISIEN.

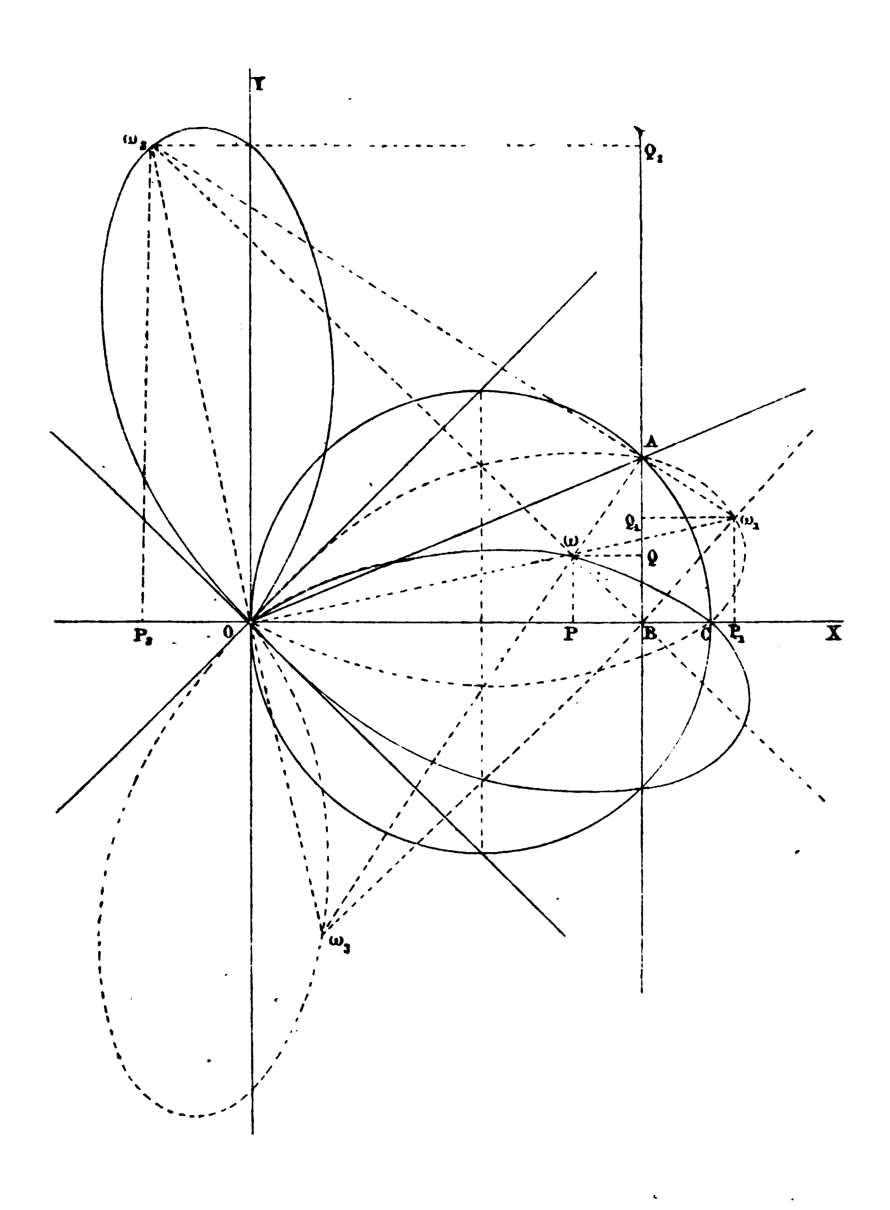
On donne un cercle Δ *et un diamètre* OC *de ce cercle; d'un point* A, *pris sur la circonférence, on abaisse sur* OC *la perpendiculaire* AB, *et l'on considère le triangle* AOB: *1° On demande le lieu des centres des cercles tangents aux droites* OA, AB, OB; *2° Le lieu se compose de deux quartiques unicursales; considérant l'une d'entre elles, on demande de distinguer sur cette courbe, formée de deux boucles égales, les points qui appartiennent au cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits du triangle* AOB; *3° Déterminer le cercle qui, ayant pour centre le point* O, *est bitangent à la courbe; 4° Trouver l'aire totale de la courbe.* (de Longchamps.)

1° Désignons par ω le centre du cercle inscrit au triangle AOB, par ω_1 le centre du cercle exinscrit dans l'angle AOB, par ω_2 le centre du cercle ex-inscrit dans l'angle ABO et ω_3 le centre du cercle ex-inscrit dans l'angle OAB. Soient P, P_1, P_2, P_3 les projections de ω, ω_1, ω_2, ω_3 sur la droite OC, et Q, Q_1, Q_2, Q_3 les projections des mêmes centres sur la droite AB.

Posons $OC = 2a$.

Nous traiterons la question par les coordonnées polaires, le point O étant le pôle, et le diamètre OC l'axe polaire.

(*) Signalée comme non résolue, sous le n° 656 du *Recueil de Problèmes* de M. Laisant.



Y
ω_2
Q_2
A
Q_1
ω_1
ω
Q
P_2
O
P
B
C
P_1
X
ω_3

Lieu du centre ω. — Les coordonnées de ω sont

$$O\omega = r, \qquad \widehat{\omega OP} = \theta.$$

Or,

$$(1) \qquad \omega P = \omega Q,$$

$$\omega P = r \sin\theta,$$

$$\omega Q = OB - r\cos\theta = OA \cos 2\theta - r\cos\theta = 2a\cos^2 2\theta - r\cos\theta.$$

En portant les valeurs de ωP et ωQ dans (1), on obtient immédiatement, pour l'équation polaire du lieu,

$$r(\sin\theta + \cos\theta) = 2a(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2,$$

ou

$$(2) \qquad r = 2a(\cos\theta - \sin\theta)^2(\cos\theta + \sin\theta).$$

Si l'on prend pour axe des x le diamètre OC, et pour axe des y la perpendiculaire à OC menée par O, on obtient pour l'équation, en coordonnées cartésiennes :

$$(3) \qquad (x^2 + y^2)^2 = 2a(x - y)^2(x + y).$$

Lieu du centre ω_1. — En écrivant que

$$\omega_1 P_1 = \omega_1 Q_1,$$

et opérant comme précédemment, on trouve, pour l'équation polaire du lieu de ω_1

$$(4) \qquad r = 2a(\cos\theta + \sin\theta)^2(\cos\theta - \sin\theta);$$

et pour l'équation en coordonnées cartésiennes :

$$(5) \qquad (x^2 + y^2)^2 = 2a(x + y)^2(x - y).$$

2° En opérant comme ci-dessus, on trouve que le lieu de ω_2 coïncide avec celui de ω, et le lieu de ω_1 avec celui de ω_3.

— La courbe (3) est donc à la fois le lieu des points ω et ω_2 : c'est une quartique formée par deux feuilles égales, tangentes aux bissectrices de l'angle des axes.

La courbe (4), qui est à la fois le lieu des points ω_1 et ω_3, est la symétrique de la courbe (3), par rapport à OC. (Cette dernière courbe est tracée sur la figure, en pointillé.)

Mais lorsque le point A, au lieu d'être, comme dans la figure, au-dessus de OC, se trouve au-dessous, ce qui revient à changer y en $-y$, on voit que, dans ce cas, les points ω et ω_2 se trouvent sur la courbe (5), tandis que ω_1 et ω_3 se trouvent sur la courbe (3).

Par conséquent, dans la courbe (3),

l'arc situé au-dessus de OX correspond au lieu de ω;
— au-dessous de OX — ω_1;
— à gauche de OY — ω_2;
— à droite de OY — ω_3.

Les portions d'arcs symétriques de la courbe (5) correspondent aux lieux des mêmes centres.

Étude de la courbe (3). — Ces quartiques étant égales, il suffit d'étudier l'une d'elles; (3), par exemple.

Cette courbe est unicursale. En effet, en posant $y = tx$, on a

$$x = \frac{2a(1 - t)^2(1 + t)}{(1 + t^2)^2}, \qquad y = \frac{2at(1 - t)^2(1 + t)}{(1 + t^2)^2}.$$

Si nous prenons de nouveaux axes, bissecteurs des anciens, sans changer l'origine, la courbe a pour nouvelle équation

$$(6) \qquad (x^2 + y^2)^2 = 4axy^2\sqrt{2},$$

ou en coordonnées polaires

$$r = 4a\sqrt{2}\cos\theta\sin^2\theta.$$

3° Pour déterminer le rayon du cercle bitangent à la courbe et ayant son centre en O, il faut trouver le maximum de r. En annulant r'_θ, on trouve $\cos^2\theta = \frac{1}{3}$,

et, pour la valeur du rayon maximum,

$$r = \frac{8a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}.$$

4° Il reste à trouver l'aire U de la courbe. On a

$$dU = \frac{1}{2}r^2d\theta = 16a^2(1 - \sin^2\theta)\sin^4\theta d\theta.$$

Donc, $$U = 16a^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta d\theta\right].$$

Or $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta = \frac{3\pi}{16}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta d\theta = \frac{5\pi}{32}.$$

Par suite, $$U = \frac{\pi a^2}{2}.$$

L'aire totale de la courbe est donc égale à πa^2, c'est-à-dire à l'aire du cercle Δ.

QUESTIONS PROPOSÉES

365. — On décrit des cercles sur les ordonnées d'une ellipse, comme diamètres. Trouver l'aire de l'enveloppe de la corde commune à deux cercles consécutifs.

(W. Greenstreet B. A.)

366. — L'aire comprise entre la courbe

$$x^2(a^2y^2 + b^2x^2) = a^4y^2$$

et ses deux asymptotes réelles est équivalente à celle de l'ellipse de demi-axes a et b. *(E.-N. Barisien.)*

367. — On considère la courbe correspondant à l'équation

$$(\Gamma) \qquad y = \frac{8a^4bx^2}{(x^2 + a^2)^3}$$

et l'ellipse représentée par l'équation

$$(E) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

1° L'aire de la courbe (Γ), comprise entre son périmètre et son asymptote réelle est équivalente à celle de l'ellipse (E).

2° L'aire de (Γ), telle que nous venons de la définir, est divisée en quatre parties équivalentes par les tangentes aux sommets du grand axe, et par le petit axe.

On propose de démontrer les deux résultats précédents sans effectuer d'intégration. *(E.-N. Barisien.)*

ERRATA

Page 54.	Ligne 9.	*Au lieu de :* désignant le rayon ρ *lire:* le rayon étant désigné par ρ.
— 56.	— 14.	En remontant, *au lieu de:* (a_1), *lire:* (a^1).
	1.	— — centre, *lire:* cercle.
— 59.	— 12.	*Au lieu de:* formule (c) *lire:* forme (c).
	— 13.	En remontant, *au lieu de:* $\Sigma \frac{A\omega^4}{b^3c^2}$ *lire:* $\Sigma \frac{A\omega^4}{b^2c^2}$.
	— 3.	En remontant, *au lieu de:* les trois points, *lire:* les deux points.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7080-3-93.

SUR LA DÉTERMINATION DES FACTEURS ÉTRANGERS
INTRODUITS DANS L'ÉLIMINATION

Par M. **H. Laurent.**

Lorsque l'on veut éliminer x et y entre trois équations

$$(1) \qquad \varphi(x, y) = 0, \quad \chi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0,$$

on élimine quelquefois x entre

$$(2) \qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad \chi(x, y) = 0,$$

ce qui donne

$$(3) \qquad F(y) = 0;$$

puis x entre

$$(4) \qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad \chi(x, y) = 0,$$

ce qui donne

$$(5) \qquad G(y) = 0.$$

On élimine ensuite y entre (3) et (5), ce qui donne

$$(6) \qquad \Theta = 0.$$

On dit alors que $\Theta = 0$ est la résultante de (1); on ajoute, avec raison, qu'elle contient des *facteurs étrangers;* mais on ne dit pas quel est le facteur dont il faudrait débarrasser Θ pour obtenir la véritable résultante. Le but de cette Note est de faire connaître ce facteur.

1. — Les résultantes (3) et (5) peuvent être mises sous la forme

$$(7) \quad \begin{cases} F(y) = \lambda(x, y)\varphi(x, y) + \mu(x, y)\chi(x, y) = 0, \\ G(y) = \lambda'(x, y)\varphi(x, y) + \nu(x, y)\psi(x, y) = 0, \end{cases}$$

λ, λ', μ, ν désignant des polynômes entiers. Cherchons la résultante de ces équations. On peut l'obtenir comme il suit: on forme les équations

$$(8) \quad \begin{cases} \dfrac{F(y)G(b_1) - F(b_1)G(y)}{y - b} = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 \dots + c_{1m}y_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{F(y)G(b_m) - F(b_m)G(y)}{y - b_m} = c_{m1}y_1 + c_{m2}y_2 \dots + c_{mm}y_m, \end{cases}$$

où $b_1, b_2 \dots b_m$ sont des arbitraires, et où m désigne le degré de F et G qui sera, par hypothèse, le produit des degrés de χ et ψ. Enfin on fait

$$y_i = \frac{f(y)}{(y - b_i)f'(b_i)}, \qquad f(y) = \Pi(y - b_i);$$

alors $\Theta = 0$, ou $\Theta = \sum \pm c_{11}\, c_{22} \dots c_{mm}$
est la résultante de $F(y) = 0$ et $G(y) = 0$.

Pour évaluer Θ, posons, pour abréger

$$\frac{F(y)G(b_i) - F(b_i)G(y)}{y - b_i} = \theta_i(x, y);$$

x n'entre que virtuellement dans θ, parce que les fonctions F et G contiennent aussi virtuellement x, en vertu de (7). Si alors dans (8), on remplace x et y par les éléments x_p, y_p d'une solution de $\chi = 0$, $\psi = 0$, on a des équations de la forme

$$\theta_i(x_p, y_p) = c_{i1} \frac{f(y_p)}{(y_p - b_i)f'(b_i)} + \dots$$

qui montre que si l'on désigne par Δ le déterminant qui a pour élément général $\theta_i(x_p, y_p)$ et par P celui qui a pour élément général $(y_p - b_i)^{-1}$, on a

$$(9) \qquad \Delta = \Theta P \frac{\Pi f(y_p)}{\Pi f'(b_i)}.$$

Mais, en vertu des formules (7), si l'on observe que $\chi(x_p, y_p)$ et $\psi(x_p, y_p)$ sont nuls, on a

$$\theta_i(x_p, y_p) = \frac{\lambda(x_p, y_p)\varphi(x_p, y_p)G(b_i) - \lambda'(x_p, y_p)\varphi(x_p, y_p)F(b_i)}{y_p - b_i},$$

en sorte que si l'on désigne par D le déterminant qui a pour élément général $\lambda(x_p, y_p)G(b_i) - \lambda'(x_p, y_p)F(b_i)$,
on a $\Delta = DP\Pi\varphi(x_p, y_p);$
et la formule (9) devient

$$D\Pi\varphi(x_p, y_p) = \Theta \frac{\Pi f(y_p)}{\Pi f'(b_i)}.$$

Le facteur étranger contenu dans Θ est donc

$$M = D \frac{\Pi f'(b_i)}{\Pi f(y_p)}.$$

REMARQUE. — La présence des arbitraires b permet de donner bien des formes diverses à ce facteur.

Prenons, par exemple, $f(y) = F(y) - G(y)$: on aura $F(b_i) = G(b_i)$, D se réduira à $\Pi F(b_i)\Pi[\lambda(x_p, y_p) - \lambda'(x_p, y_p)]$; et l'on aura $M = \Pi[\lambda(x_p, y_p) - \lambda'(x_p, y_p)] \dfrac{\Pi F(b_i)f'(b_i)}{\Pi f(y_p)}$.

(A suivre.)

ÉTUDE SUR LES CUBIQUES CIRCULAIRES

(DÉFINITIONS, TANGENTES ET NORMALES, QUADRATURES)

Par M. **Jan Cyane**, ancien élève de l'École Polytechnique.

PREMIÈRE DÉFINITION

M. de Longchamps a défini les cubiques circulaires, de la façon suivante :

Etant donnés un cercle Γ et une droite Δ, on prend un point fixe O sur ce cercle, par lequel on fait passer une

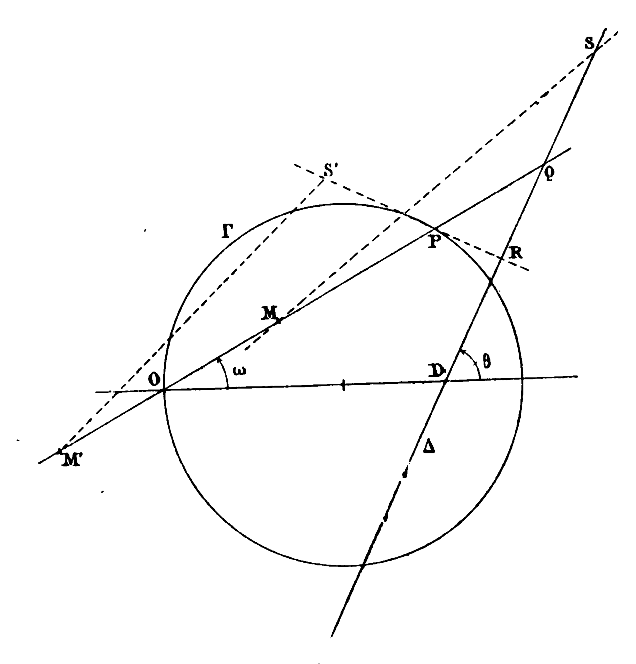


Fig. 1

sécante variable coupant le cercle en P et la droite en Q, et l'on porte, sur cette sécante, un segment OM (ou OM') égal à PQ et dans le même sens (ou en sens contraire) *(fig. 1)*,

Tangente. — La méthode des *transversales réciproques* permet de construire la tangente en M.

Il suffit, comme on sait, de mener en P la tangente au cercle et de prendre le symétrique S par rapport au point Q de son point d'intersection R avec la droite Δ. La tangente en M passe par ce point S.

(Pour avoir la tangente en M', il suffit encore de prendre le symétrique S' de ce même point R, par rapport au point P, la tangente en M' passe par ce point S'.)

Sous-normale. — Soient ρ le rayon vecteur OM, ρ_γ le rayon OP et ρ_δ le rayon vecteur OQ.

Par définition :

$$\rho = \rho_\delta - \rho_\gamma,$$

d'où en différentiant par rapport à l'angle ω :

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{d\rho_\delta}{d\omega} - \frac{d\rho_\gamma}{d\omega}.$$

Ainsi la sous-normale $\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)$, de la cubique, est égale à la différence des sous normales de la droite Δ et du cercle Γ.

DEUXIÈME DÉFINITION

Soient un cercle Γ et une droite Δ. Prenons encore un point fixe O sur le cercle, et menons, par ce point, la sécante variable PQ. Le lieu du point M, qui divise PQ dans un rapport constant, est une des cubiques définies précédemment.

En effet, posons

$$\rho = \mathrm{OM}, \quad \rho_\gamma = \mathrm{OP}, \quad \rho_\delta = \mathrm{OQ}; \quad \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MQ}} = -\frac{p}{q}.$$

On a, pour équation du lieu de M :

$$\rho = \rho_\delta - \frac{q}{p+q} \cdot (\rho_\delta - \rho_\gamma),$$

ou $\rho = \frac{p}{p+q} \cdot \rho_\delta + \frac{q}{p+q} \cdot \rho_\gamma = \frac{p}{p+q} \cdot \rho_\delta - \left(-\frac{q}{p+q} \cdot \rho_\gamma\right).$

Or, le premier terme de cette différence est le rayon vecteur d'une droite homothétique à Δ, par rapport au point O, et le second terme est le rayon vecteur d'un cercle inversement homothétique à Γ, par rapport au même point O.

Ainsi la courbe lieu de M satisfait à la première définition.

Sous-normale. — Sa longueur est donnée par l'équation :

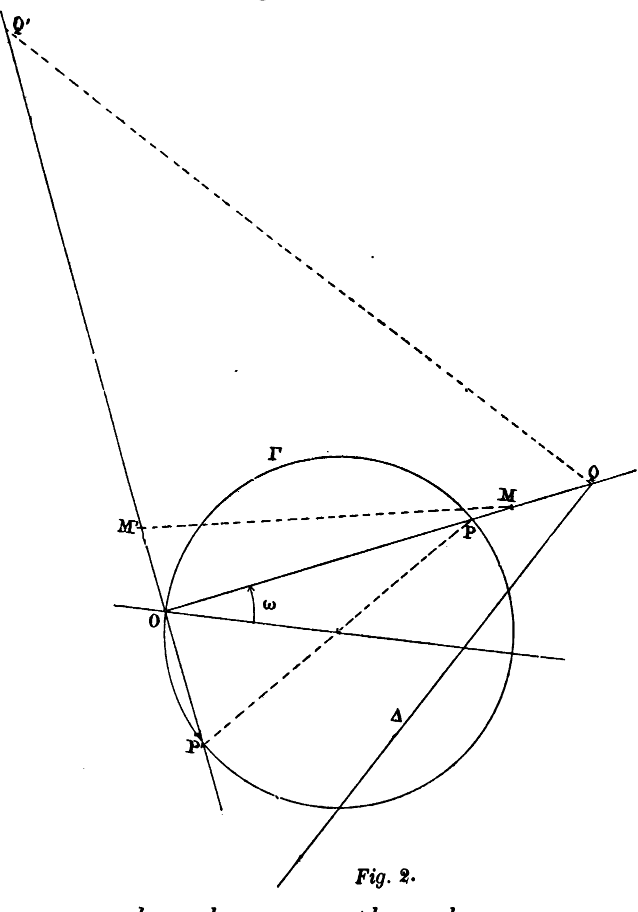


Fig. 2.

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{d\rho_\delta}{d\omega} - \frac{q}{p+q}\left(\frac{d\rho_\delta}{d\omega} - \frac{d\rho_\gamma}{d\omega}\right),$$

ce qui montre que, si M′, P′ et Q′ sont les extrémités des sous-normales des lieux de M, de P et de Q, le point M′ divise le segment P′Q′ dans le rapport :

$$\frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{M'Q'}} = -\frac{p}{q} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MQ}}.$$

TROISIÈME DÉFINITION

Reprenons la première définition :

$$OM = PQ. \qquad (fig.\ 3)$$

Par le point O, menons OR égal et parallèle à PI. Nous formons un triangle OMR égal à PQI, et où MR est parallèle à IQ, c'est-à-dire à Δ. De plus, l'angle $\widehat{MOR} = \widehat{IPQ}$ est constant.

Le lieu de R est évidemment la circonférence Γ_i symé-

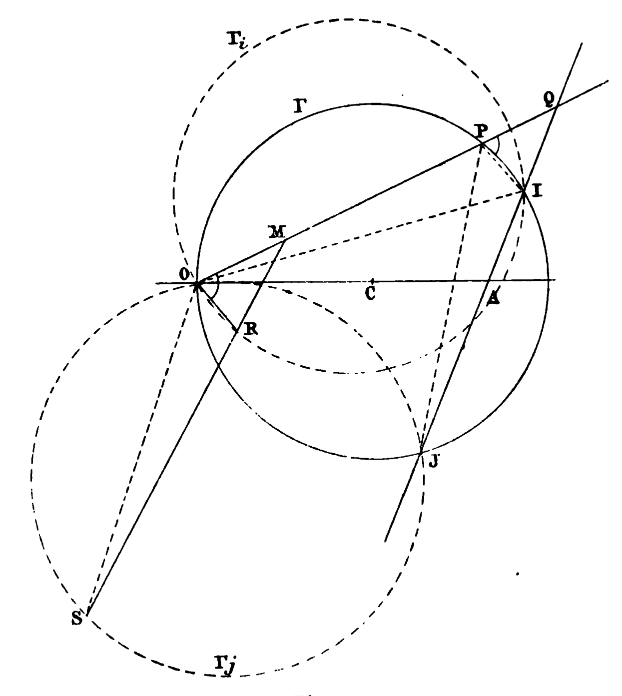


Fig. 3

trique de Γ par rapport au milieu de OI.

D'où la définition suivante de la cubique circulaire, lieu de M :

Etant donnés un cercle Γ_i et un point O de ce cercle; on fait tourner, en ce point, un angle constant $\widehat{MOR}$, dont un des côtés coupe le cercle en R; et, par ce point R, on mène

une droite RM, parallèle à une direction constante. Soit M le point où elle rencontre le second côté OM de l'angle constant : le lieu de M est une cubique circulaire.

Remarque. — Au point J correspond évidemment un second cercle Γ_j et un nouvel angle constant $\widehat{MOS} = \widehat{QPJ}$.

Ce cercle Γ_j est, comme Γ_i, égal au cercle Γ.

La longueur RS, égale à IJ, est aussi la distance des centres des cercles Γ_i et Γ_j.

Normale. — Cherchons à construire la normale, d'après cette nouvelle définition *(fig. 4)*.

Soient ROM et R'OM' deux positions infiniment voisines de la figure génératrice.

L'angle $\widehat{R'OM'}$ étant égal à $\widehat{ROM}$, les éléments angulaires $\widehat{ROR'}$ et $\widehat{MOM'}$ sont aussi égaux ; soit $d\omega$ leur valeur commune.

Menons RR″ et MM″, perpendiculaires communes à RM et à R'M'. Ces deux longueurs RR″ et MM″ sont égales à de, déplacement élémentaire de la droite RM de direction constante.

Fig. 4

Par suite on a :

$$\frac{\mathrm{MM}''}{\widehat{\mathrm{MOM}'}} = \frac{\mathrm{RR}''}{\widehat{\mathrm{ROR}'}} = \frac{de}{d\omega}.$$

Interprétons la quantité $\frac{\mathrm{MM}''}{\widehat{\mathrm{MOM}'}}$; ce n'est autre chose que la projection RH sur la droite RM de la normale RL, au point R.

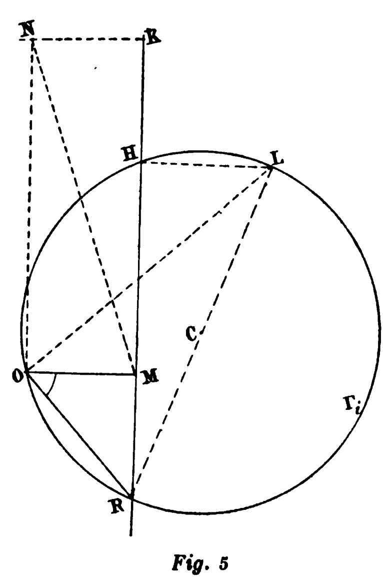


Fig. 5

En effet, l'angle $\widehat{\mathrm{ROL}}$ étant droit, RL, perpendiculaire à RR′, est le diamètre du cercle circonscrit au triangle ROR′. Or, d'après une propriété connue, on a :

$$\mathrm{RL} = \frac{\mathrm{RR}'}{\sin \widehat{\mathrm{ROR}'}} = \frac{\mathrm{RR}''}{\cos \theta . d\omega}$$

ou $$\mathrm{RL} \cos \theta = \frac{de}{d\omega}.$$

Mais RL cos θ est égal à RH. Ainsi :

$$\mathrm{RH} = \frac{de}{d\omega}.$$

On verrait de même, en menant la normale MN en N et la sous-normale ON en O, et en projctant MN en MK sur la droite RM, que $\mathrm{MK} = \frac{de}{d\omega}$.

Donc MK = RH ; ce qui veut dire que les projections, sur RM, des normales en R et en M sont égales.

Cela permet de construire la normale à la cubique lieu de M.

Construction de la normale. — On prend RH, projection de la normale RL au cercle Γ_i, et l'on porte cette longueur en MK sur la droite RM ; on élève, en K, la perpendiculaire KN et en O la sous-normale ON ; le point d'intersection N de ces deux droites est l'extrémité de la normale MN *(fig. 5)*.

Remarque. — Dans la démonstration de la propriété de la

normale, on n'a pas supposé que le lieu de R était un cercle passant par O. Ce lieu peut être une courbe quelconque (*fig. 6*).

De même le point O peut ne pas être fixe : ses côtés OR

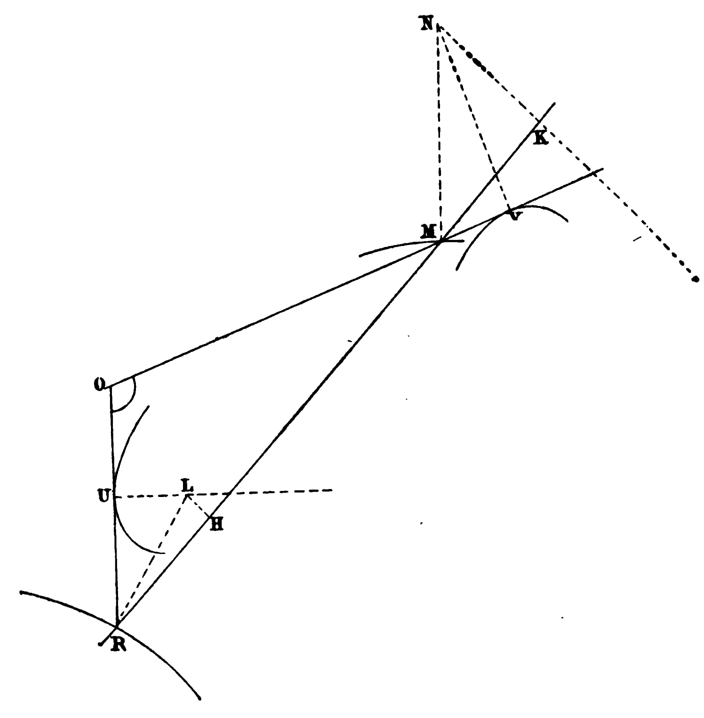


Fig. 6

et OM peuvent envelopper deux courbes quelconques, qu'ils touchent en U et en V, par exemple.

Si l'angle O est constant, et si la direction de la droite RM est aussi, constante on construira de la même manière la normale MN en M, connaissant la normale RL en R. Il suffira de prendre MK égal à RH.

(A suivre.)

SUR LE DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE PLANE (*)

Par M. **F. Balitrand**, ancien élève de l'École Polytechnique.

APPLICATIONS

La théorie du déplacement d'une figure plane de forme invariable, peut servir dans l'étude des courbes, si, dans cette étude, on rencontre un élément qui conserve la même grandeur pour tous les points de la courbe, en appliquant alors les différents théorèmes que nous avons donnés, on arrive à des démonstrations géométriques assez simples, surtout en ce qui concerne la courbure. Ainsi la portion de tangente à une hypocycloïde à trois rebroussements, comprise à l'intérieur de la courbe, a une longueur constante. De cette proposition, due, comme on le sait, à M. Cremona (**), nous allons tirer, par la voie qui précède, quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois rebroussements, et notamment une démonstration très simple du théorème de M. de Longchamps (***) : « *Le rayon de courbure, en un point de l'hypocycloïde à trois rebroussements, est égal à huit fois la distance du centre de la courbe à la tangente en ce point* ». De même, dans l'hypocycloïde à quatre rebroussements, la portion de tangente comprise entre les axes, a une longueur constante, pour tous les points de la courbe. L'on peut, au moyen de cette remarque, construire très simplement le rayon de courbure en un point de l'hypocycloïde.

Avant de passer à ces applications, il nous faut faire deux remarques :

1° Dans le déplacement d'une figure plane, les centres de courbure des courbes enveloppes de toutes les droites du plan, pour une position quelconque de la figure, sont sur le cercle C (****).

(*) V. *Journal*, 1892, p. 121-159.

(**) Voir l'article de M. de Longchamps sur l'hypocycloïde (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1884). Dans ce qui suit, il nous arrivera de supposer connues beaucoup de propriétés de l'hypocycloïde ; pour toutes ces propriétés, se reporter à l'article cité.

(***) G de Longchamps *loco citato)*.

(****) Voir Mannheim (*Cours de Géométrie de l'École polytechnique*, p. 216). — Le cercle C est désigné sous le nom de cercle I.

2° On sait que le déplacement de la figure mobile peut être obtenu en faisant rouler sur une courbe fixe (lieu du centre instantané, dans le plan fixe) appelée base, une courbe mobile (lieu du centre instantané, dans le plan mobile) appelée roulette. Soient ρ et ρ' les rayons de courbure de la base et de la roulette, qui sont tangentes au centre instantané de rotation; le diamètre du cercle des inflexions (*), est égal à

$$\frac{\rho\rho'}{\rho \pm \rho'}.$$

Il faut prendre le signe $+$, dans le cas où la base et la roulette ont leurs concavités opposées; le signe $-$; dans le cas contraire.

Cela posé, soit H_3 une hypocycloïde à trois rebroussements; O le centre; A, B, C les points de rebroussement; A′, B′, C′ les sommets ; a le rayon du cercle tritangent O.

La tangente en un point M, à l'hypocycloïde, coupe la courbe aux points μ_1 et μ_2, et l'on a

$$\mu_1\mu_2 = 4a.$$

Les tangentes en μ_1 et μ_2 sont rectangulaires et se coupent en μ, sur le cercle tritangent O.

La perpendiculaire abaissée de μ sur la droite $\mu_1\mu_2$, la coupe en un point μ_3 situé sur le cercle O.

Pour un déplacement infiniment petit de la droite $\mu_1\mu_2$, le centre instantané de rotation est en I, point de rencontre des normales à l'hypocycloïde à trois rebroussements, aux points μ_1 et μ_2. Le lieu du centre instantané dans le plan fixe est le cercle de rayon $OI = 3a$; c'est-à-dire le cercle ABC; le lieu du centre instantané dans le plan mobile est le cercle de diamètre $\mu_1\mu_2 = 4a$. D'où ce théorème :

Le déplacement de la droite $\mu_1\mu_2$ peut être obtenu par le mouvement d'un cercle de rayon 2a *roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon* 3a.

Le cercle des inflexions a pour diamètre $6a$ (Remarque II). Il présente cette particularité curieuse d'être fixe et de coïncider avec le cercle qui passe par les points de rebroussement de l'hypocycloïde. Sa connaissance entraîne celle du cercle C,

(*) Voir Mannheim (p. 215). — La formule est mise sous la forme

$$\frac{1}{ai} = \frac{1}{R_M} + \frac{1}{R_F}.$$

qui est symétrique du cercle des inflexions, par rapport à la tangente en I à ce cercle.

Puisque le point I est le centre instantané de rotation, la droite IM est la normale en M à l'hypocycloïde à trois rebroussements; et, si nous appelons M′ le point où elle coupe le cercle C, le rayon de courbure en M est égal à MM′. Mais les cercles O et C sont homothétiques, et le rapport d'homothétie est égal à $\frac{1}{3}$; donc :

$$IM' = 3\mu\mu_2,$$
$$MM' = 4\mu\mu_2,$$

c'est-à-dire que :

Le rayon de courbure à l'hypocycloïde, au point M, *est égal à huit fois la distance du centre* O *à la tangente en ce point.*

C'est le théorème de M. de Longchamps.

Pour appliquer le théorème de Rivals au déplacement de la droite $\mu_1\mu_2$, il faut observer que le milieu de $\mu_1\mu_2$ se trouve sur le cercle O. On arrive alors au théorème suivant :

Les centres de courbure μ_1', μ_2' *de l'hypocycloïde, aux points* μ_1 *et* μ_2, *le centre* O, *le point de rencontre avec le cercle* C *de la parallèle menée par* I *à* $\mu_1\mu_2$, *sont sur une conique osculatrice en* I *au cercle* C.

Ce théorème permet évidemment de construire le cercle de courbure en μ_1, par exemple; on l'obtient en prenant l'intersection d'une droite avec une conique déterminée par cinq points.

La construction du centre de courbure de la trajectoire d'un point quelconque, dans le déplacement d'une figure plane, indiquée dans la Note II, peut encore servir à déterminer le centre de courbure de l'hypocycloïde, en μ_1. La construction est indiquée sur la figure.

Soient ν_1 et ν_2 les points de rencontre des normales à l'hypocycloïde, en μ_1 et μ_2, avec le cercle ABC. La formule

$$\rho = \frac{r^2}{MN}$$

devient

$$\rho_1 = \frac{I\mu_1^2}{\mu_1\nu_1},$$
$$\rho_2 = \frac{I\mu_2^2}{\mu_2\nu_2};$$

et comme les triangles $I\mu_1\mu_2$, $I\nu_1\nu_2$ sont semblables, on a

$$\frac{I\mu_1}{I\mu_2} = \frac{\mu_1\nu_1}{\mu_2\nu_2};$$

d'où

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{I\mu_1}{I\mu_2}.$$

Donc :

Les centres de courbure de l'hypocycloïde, en μ_1 et μ_2, sont sur une parallèle à la tangente $\mu_1\mu_2$.

La démonstration directe de cette propriété est bien facile. En effet, puisque l'angle $\mu_1I\mu_2$ est droit, les angles de contingence, en μ_1 et μ_2, sont égaux; et, par suite,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{d\sigma_1}{d\sigma_2}.$$

Soit m_1m_2 une position infiniment voisine de $\mu_1\mu_2$. Soient m_1', m_2' les projections de m_1, m_2 sur $\mu_1\mu_2$. En négligeant les infiniment petits du second ordre, on a

$$m_1'm_2' = m_1m_2 = \mu_1\mu_2;$$

donc

$$\mu_1m_1' = \mu_2m_2',$$

c'est-à-dire

$$d\sigma_1 \cos (\mu_1m_1, \mu_1\mu_2 = d\sigma_2 \sin (\mu_2m_2, \mu_1\mu_2);$$

ou, en désignant par ω l'angle sous lequel la tangente $\mu_1\mu_2$ coupe l'hypocycloïde à trois rebroussements, au point μ_1,

$$\rho_1 = \rho_2 \operatorname{tg} \omega.$$

Nous avons vu que les deux triangles $I\mu_1\mu_2$, $I\nu_1\nu_2$ sont semblables. Il est évident que

$$I\mu_1 = 2\mu_1\nu_1.$$

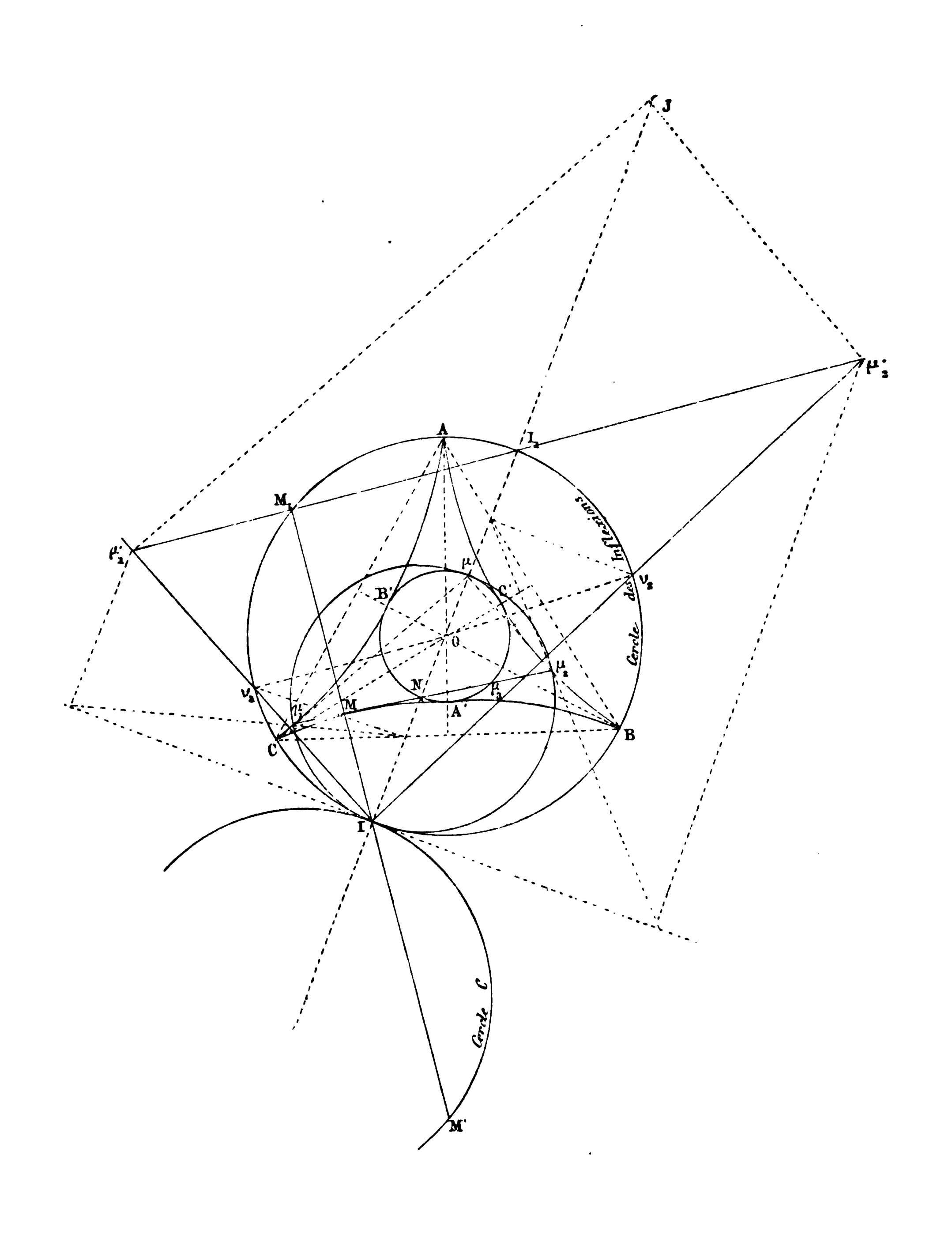
D'où ce théorème :

Si l'on mène la normale à l'hypocycloïde, au point μ_1, la portion de cette normale comprise à l'intérieur du cercle qui passe par les points de rebroussement est divisée, au point μ_1, dans le rapport de $\frac{1}{2}$.

Ce théorème fournit encore un moyen de construire le point où la droite $\mu_1\nu_1$ touche son enveloppe; c'est-à-dire le centre de courbure de l'hypocycloïde relatif au point μ_1 (*).

Le théorème de M. de Longchamps montre aisément que la distance qui sépare les centres de courbure μ_1', μ_2' est constante et égale à $12a$. Nous trouvons encore ici une droite de

(*) Voir Mannheim, p. 174.


J
μ_2'
A
I_2
M_1
Cercle des Inflexions
μ_1'
μ
ν_2
B'
C'
O
μ_2
N
μ_3
M
A'
B
C
I
Cercle C
M'

longueur invariable. Pour un déplacement infiniment petit de cette droite, le centre instantané de rotation est en J, point de rencontre des perpendiculaires élevées en μ_1' et μ_2' aux droites $\mu_1\mu_1'$, $\mu_2\mu_2'$. Dans le plan fixe, le lieu du point J est le cercle ayant pour centre le point O, pour rayon $9a$. Dans le plan mobile, le lieu du point J est le cercle décrit sur $\mu_1'\mu_2' = 12a$ comme diamètre. La droite $\mu_1'\mu_2'$ est donc entraînée dans le déplacement de ce cercle de rayon $6a$, qui roule à l'intérieur d'un cercle de rayon $9a$; par suite elle enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.

On peut démontrer autrement cette proposition. En effet, soit N le point de rencontre de $\mu_1\mu_2$ et du cercle C (N est le milieu de $\mu_1\mu_2$); soit I_1 le point où IJ rencontre le cercle ABC; (I_1 est le milieu de $\mu_1'\mu_2'$, et aussi de IJ); soit enfin M_1 le point où IM rencontre $\mu_1'\mu_2'$. Puisque la droite $\mu_1\mu_2$ enveloppe une hypocycloïde, on a

$$A'\mu_2 = 2A'N.$$

Par suite, on a aussi

$$AM_1 = 2AI_1;$$

et la droite $\mu_1'\mu_2'$ a également pour enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. Les points A, B, C sont les sommets de cette hypocycloïde. Donc:

La développée d'une hypocycloïde à trois rebroussements, de paramètre a, *est une hypocycloïde à trois rebroussements de paramètre* 3a, *ayant pour sommets les points de rebroussement de la première* (*).

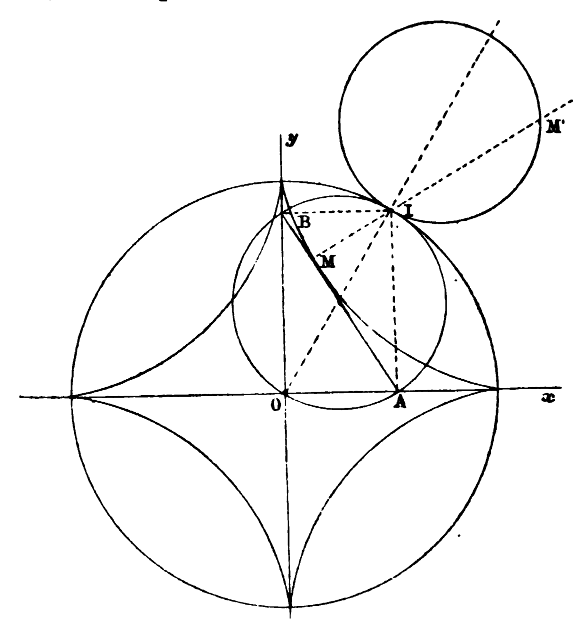
Jusqu'ici, nous ne nous sommes occupés que du déplacement de la droite $\mu_1\mu_2$; mais l'on peut aussi étudier les déplacement du point M où la droite $\mu_1\mu_2$ touche son enveloppe. Le point M peut-être considéré comme un point de la circonférence tangente, en I, au cercle ABC, et dont le diamètre est $IN = 2a$. On sait que le lieu des points, tels que N, est l'hypocycloïde à trois rebroussements engendrée

(*) Voir *Journal de Mathématiques spéciales* 1889, p. 274. C'est là une propriété générale, qui s'étend même à l'enveloppe des droites qui coupent une hypocycloïde ou une épicycloïde sous un angle constant. (Voir Kœlher, *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure*, p. 315.)

par ce point, lorsque la circonférence de diamètre IN roule sur la circonférence ABC (*).

Hypocycloïde à quatre rebroussements (**). — Soit AB une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires Ox et Oy. L'enveloppe de AB est une hypocycloïde à quatre rebroussements. Pour un déplacement infiniment petit de la droite AB, le centre instantané de rotation est en I, point de rencontre des perpendiculaires élevées en A et B à Ox et Oy; et le point de contact M de la droite AB, avec son enveloppe, s'obtient en projetant le point I sur AB.

Dans le plan fixe, le lieu du centre instantané est le cercle de rayon OI; dans le plan mobile, c'est le cercle de diamètre OI;



le cercle des inflexions est précisément ce cercle de diamètre OI. Le cercle C s'obtient en prenant le symétrique du cercle

(*) Voir Mannheim (*Cours de Géométrie de l'École polytechnique*, p. 167).

(**) Sur l'hypocycloïde à quatre rebroussements, on peut consulter la Note de M. Rat (*Journal de Mathématiques spéciales* 1887, p. 148, 172).

des inflexions, par rapport à la tangente en I. Soit M′ le point d'intersection du cercle C et de la droite IM; M′ est le centre de courbure de l'hypocycloïde au point M. La figure montre immédiatement que MM′ = 3IM; ce qui permet de construire le centre de courbure en un point de l'hypocycloïde (*).

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite*, voir p. 83.)

257. — *Soient un triangle* ABC, M *un point*, A′B′C′ *son triangle podaire. Par* A′,B′,C′ *on mène respectivement des parallèles à* MA, MB, MC. *Lieu de* M, *de manière que ces parallèles soient concourantes.*

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées normales de M, P le point de concours des trois parallèles considérées. L'équation de PC est :

$$x(ax_1 + cz_1)[y_1^2 \cos A + y_1z_1 + x_1z_1 \cos C - x_1y_1 \cos B] =$$
$$= y(by_1 + cz_1)[x_1^2 \cos B + x_1z_1 + y_1z_1 \cos C - x_1y_1 \cos A].$$

La condition pour que les trois droites analogues soient concourantes est, en supprimant les indices,

$$\begin{aligned}
&(y^2 \cos A + yz + xz \cos C - xy \cos B) \times \\
&(z^2 \cos B + xz + xy \cos A - yz \cos C) \times \\
&(x^2 \cos C + xy + yz \cos B - xz \cos A) = \\
&(x^2 \cos B + xz + yz \cos C - xy \cos A) \times \\
&(y^2 \cos C + xy + xz \cos A - yz \cos B) \times \\
&(z^2 \cos A + yz + xy \cos B - xz \cos C),
\end{aligned}$$

équation du lieu de M. On peut l'écrire ainsi :

$$xyz\sum x(y^2 - z^2)[2 \cos 2A \cos B \cos C + \cos A + \cos^3 A]$$
$$+ \sum \cos A (\cos^2 C - \cos^2 B)yz(x^4 - y^2z^2)$$
$$+ \sum \cos A \sin B \sin C x^2(y^4 - z^4) = 0.$$

Cette courbe du sixième degré est sa propre transformée par inversion trilinéaire; elle est circonscrite au triangle de référence; elle passe par l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit, les centres des cercles inscrits et ex-inscrits....

(*) Voir *Nouvelles Annales*, 1886, p. 278. Ce résultat est attribué à M. Lamarle.

Les points A, B, C, H se correspondent à eux-mêmes. Si M coïncide avec O, alors P est le centre du cercle d'Euler. Si M est I, P est le point ψ.

$$\frac{x}{\cos B + \cos C} = \frac{y}{\cos A + \cos C} = \frac{z}{\cos A + \cos B}.$$

258. — *On considère un triangle, un point fixe* P (x_1, y_1, z_1), *un point* M (x', y', z'); *par* M, *on mène des parallèles à* PA, PB, PC, *qui rencontrent les côtés du triangle respectivement en* A′, B′, C′. *Déterminer le lieu de* M, *de manière que les points* A′, B′, C′, *soient en ligne droite.*

On trouve aisément, pour les coordonnées de A′ : $x = 0$,

$$\frac{y}{ax'y_1 + by'y_1 + cy'z_1} = \frac{z}{ax'z_1 + cz'z_1 + bz'y_1}.$$

La condition pour que ces points soient en ligne droite est (en supprimant les accents) :

$$\begin{vmatrix} 0 & y_1(ax+by)+cyz_1 & z_1(ax+cz)+bzy_1 \\ x_1(ax+by)+cxz_1 & 0 & z_1(by+cz)+azx_1 \\ x_1(ax+cz)+bxy_1 & y_1(by+cz)+ayx_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est l'équation du lieu de M.

Si l'on développe et si l'on fait abstraction des facteurs $ax + by + cz$, $ax_1 + by_1 + cz_1$, l'équation s'abaisse au second degré et devient :

$$\sum \frac{x_1}{x}(by_1 + cz_1) = 0;$$

ou, en coordonnées barycentriques :

$$(1) \qquad \sum \frac{\alpha_1}{\alpha}(\beta_1 + \gamma_1) = 0 \qquad \text{(conique circonscrite)}$$

On peut observer que, si l'on permute α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, l'équation ne change pas, de sorte que :

Si (α_1, β_1, γ_1), (α, β, γ) *sont les coordonnées barycentriques de deux points* P *et* M*; le lieu des points* M *tels que les parallèles menées par* P *à* MA, MB, MC *rencontrent les côtés du triangle de référence en trois points en ligne droite est la conique représenté par l'équation* (1).

Application :

Si, par l'orthocentre H, *on mène des parallèles à* MA, MB, MC*; ces parallèles rencontrant les côtés en* A′, B′, C′, *ces derniers points seront toujours en ligne droite, quand* M *décrira la circonférence circonscrite.*

La question proposée est en quelque sorte une généralisation des droites de Simson; les droites de Simson, habituellement considérées, étant relatives au cas où P est l'orthocentre.

Si P est le centre de gravité, (1) représente l'ellipse de Steiner.

Si P est le point de Steiner, on a

$$\alpha(b^2 - c^2) = \beta(c^2 - a^2) = \gamma(a^2 - b^2),$$

l'équation représente alors l'hyperbole de Kiepert; etc...

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. H. Brocard :

« Les deux quartiques définies dans votre question 49 (résolue *J. S.*, p. 92), sont en réalité deux positions particulières de la courbe que vous avez étudiée depuis plusieurs années dans ce Journal sous le nom de *folium double* (*J. S.*, 1886, p. 251).

C'est donc, en définitive, un paragraphe qui aurait eu sa place toute marquée dans les articles sur le *trifolium*, parus en 1891, et dans la bibliographie de cette courbe (*J. S.*, 1891, p. 180).

Il y en a peut-être d'autres dans la collection du Journal ou dans celle des différentes publications mathématiques. Il serait donc intéressant d'en avoir un relevé détaillé.

Les constructions données du *folium double* (*J. S.*, 1891, pp. 109-110) font dériver cette courbe de cercles de rayons R ou 2R. La construction de la question 49 la fait dériver d'une circonférence de rayon $R\sqrt{2}$, mais rencontrant la courbe sous un angle de 45°. A la figure 14 du Mémoire précité (1891, p. 109) il faudrait donc ajouter deux circonférences ayant leurs centres sur les bissectrices de l'angle des axes de coordonnées.... »

M. Michel, lieutenant du Génie à Montpellier, nous a adressé la lettre suivante, en nous priant de l'insérer. Nous accédons bien volontiers au désir que nous témoigne notre jeune collaborateur: et nous rappelons à ce propos que tout renseignement destiné à éclairer les droits de priorité est, ici, accueilli avec empressement.

Voici la lettre en question :

« Les résultats développés dans la Note « *Sur les Cycliques planes* » que j'ai publiée récemment dans votre Journal sont, pour la plupart, contenus dans un Mémoire publié par M. G. Humbert (Sur les Surfaces cyclides, *Journal de l'École polytechnique*, 55e cahier). Je ne saurais trop engager les lecteurs de ma Note à se reporter au savant travail de M. G. Humbert. Ils y trouveront, établies par la voie géométrique, les propriétés que j'ai démontrées dans cette Note par une analyse élémentaire, mise à la portée des élèves de Mathématiques spéciales. »

EXERCICE ÉCRIT

67. — Soit F l'un des foyers d'une conique Γ. Par un point M on mène à Γ les tangentes MA, MB; trouver le lieu décrit par M quand

$$\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{2K}{FC}.$$

Examiner le cas où la constante donnée K est égale à l'unité. Déduire du résultat obtenu, dans ce cas particulier, un théorème concernant l'hyperbole.

Note sur l'exercice 66.

Soit M (α, β) un point du lieu. Menons par M les normales à la parabole P ; soit MA l'une d'entre elles. Représentons par x, y les coordonnées du point A et par x', y' celles du point ω, centre de courbure correspondant à A. En projetant sur Ox, en A′, M′, ω' les points A, M, ω, on a

$$\frac{MA}{A\omega} = \frac{M'A'}{A'\omega'} = \frac{\alpha - x}{x' - x}.$$

Mais on sait (*G. A.*, p. 484) que

$$x' = p + 3x;$$

par conséquent

$$(1) \qquad \frac{MA}{A\omega} = u = \frac{\alpha - x}{p + 2x}.$$

D'ailleurs les abscisses des pieds des normales issues de M sont les racines de l'équation

$$(2) \qquad (p + x - \alpha)^2 x = \frac{p\beta^2}{2}.$$

D'après (1) et (2), on a donc

$$u^3[4\beta^2 + (2\alpha - p)^2] + u^2\left[2p(p - \alpha) - \frac{\alpha}{p}(p - \alpha)^2 + 6\beta^2\right]$$
$$+ u[p^2 - 2\alpha(p - \alpha) + 3\beta^2] + \frac{\beta^2}{2} - p\alpha = 0.$$

Cette équation permet de trouver le lieu du point M, quand on donne entre $\frac{MA}{A\omega}$, et les quantités analogues, une relation. Dans l'exercice proposé, le produit des trois rapports étant égal à l'unité, on a

$$(3) \qquad \beta^2 - 2p\alpha = 8K\left[\beta^2 + \left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^2\right].$$

Le lieu est une conique confocale à la parabole donnée, la directrice correspondante à ce foyer étant la directrice de cette parabole.

Pour que la conique (3) se décompose, on trouve en appliquant la règle connue, $8K = 1$. Dans ce cas, l'équation (3) représente la directrice même de la parabole donnée. On arrive immédiatement à ce résultat,

sans calculer le discriminant relatif à (3), en observant que cette équation peut se mettre sous la forme

$$\left(\alpha + \frac{p}{2}\right)^2 = (8K - 1)\left[\beta^2 + \left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^2\right].$$

QUESTION 87

Solution par M. H. Brocard.

Trouver le terme général de la série

6.210.7140.242556....

qui renferme, dans leur ordre de grandeur croissante, tous les nombres qui sont, à la fois, triangulaires et carrés.

(S. Realis.)

Un nombre triangulaire ayant, par définition, la forme

$$\frac{m(m+1)}{2},$$

on voit que la question proposée revient à résoudre, en nombres entiers, l'équation indéterminée

$$\frac{m(m+1)}{2} = n(n+1).$$

On en tire

(A) $$m = \frac{-1 \pm \sqrt{8n^2 + 8n + 1}}{2}.$$

La quantité sous le radical doit être un carré x^2.

Mais $8n^2 + 8n + 2 = 2(2n+1)^2$;

donc $8n^2 + 8n + 1 = 2(2n+1)^2 - 1$;

et en posant $2n + 1 = y$,

on est conduit, en définitive, à résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^2 - 2y^2 = -1,$$

rencontrée, avec l'équation

$$x^2 - 2y^2 = 1,$$

dans un grand nombre de problèmes analogues (Voir, par exemple, N. A. M., quest. 953, A. Laisant, solution par Moret-Blanc, 1872, 173; quest. 1338, Lionnet, 1881, 373; N. C. M., quest. 233, Ph. Breton, solutions 1877, 194 et 1879, 285, E. Catalan; quest. 89, E. Lucas; J. E., 1884, 15-19, G. de Longchamps; N. C. M., 1878, 166-167; *Mathesis*, quest. 282, de

Rocquigny, 1886, 162; J. S., quest. 360, E. Lemoine; solution par M. Catalan, 1893, 23, etc.).

Par des essais directs, on trouve assez facilement, en dehors du système immédiat

$$x = 1, \qquad y = 0,$$

les valeurs

$$x = 7, \qquad y = 5,$$
$$x = 41, \qquad y = 29.$$

Les premières solutions de l'équation

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

suffisent pour avoir toutes les autres, en se servant des relations de récurrence

$$x_1 = 3x - 4y,$$
$$y_1 = 2x - 3y,$$

données par Moret-Blanc (*loc. cit.*) et aussi par M. Lemoine (*quest.* 360, J. S.), ou des relations plus simples

$$x_{i+1} = 6x_i - x_{i-1},$$
$$y_{i+1} = 6y_i - y_{i-1},$$

indiquées aussi par Moret-Blanc et par Lionnet (N. A. M. *loc. cit.*).

D'ailleurs, ainsi que l'a rappelé M. Catalan (J. S. 1893, 23), toutes ces valeurs numériques sont données par le développement des formules

$$x = \frac{(1+\sqrt{2})^{2k} + (1-\sqrt{2})^{2k+1}}{2},$$

$$y = \frac{(1+\sqrt{2})^{2k+1} - (1-\sqrt{2})^{2k+1}}{2\sqrt{2}}.$$

On aura donc, pour solutions successives, les valeurs

x	y
1	0
7	5
41	29
239	169
1393	985
8119	5741
47321	33461
275807	195025
....	....

et comme on a $n = \frac{y-1}{2}$, $m = \frac{x-1}{2}$,

la question est complètement résolue, et le terme général est donné par l'identité

$$\frac{(x-1)(x+1)}{8} = \frac{(y-1)(y+1)}{4}$$

qui reproduit l'équation

$$x^2 - 2y^2 = -1.$$

On aura donc

$$\frac{5^2-1}{4} = 6, \quad \frac{29^2-1}{4} = 210, \quad \frac{169^2-1}{4} = 7140\ldots.$$

Ce sont les nombres indiqués par S. Realis.

On voit qu'ils satisfont à la double condition énoncée, car on a les relations

$$6 = \frac{3.4}{2} = 2.3,$$

$$210 = \frac{20.21}{2} = 14.15,$$

$$7140 = \frac{119.120}{2} = 85.86.$$

$$\ldots \quad \ldots. \quad \ldots.$$

A titre de curiosité, nous donnons, pour finir, les résultats suivants :

$$x = 367\ 296\ 043\ 199,$$

$$y = 259\ 717\ 522\ 849,$$

$$\frac{y^2}{4} - 1 = D = 16\ 863\ 297\ 918\ 705\ 209\ 269\ 200,$$

$$m = 183\ 648\ 021\ 599,$$

$$n = 129\ 858\ 761\ 424.$$

Les formules de récurrence données ci-dessus facilitent singulièrement la détermination de ces nombres, et l'on obtient ainsi les diverses valeurs de y et de D. Pour en déduire n ou m, il suffit d'extraire la racine carrée des nombres D ou 2D. En effet :

$$D = n^2 + n, \qquad D - n^2 = n,$$

$$2D = m^2 + m, \qquad 2D - m^2 = m.$$

Par conséquent, l'opération de l'extraction de la racine carrée de D et de 2D donnera pour racine n ou m, et laissera en même temps pour reste ce même nombre n ou m, ce qui servira de vérification.

On voit donc combien ce procédé est plus expéditif que celui du calcul de la formule (A) ou que la résolution des équations

$$n^2 + n - D = 0,$$
$$m^2 + m - 2D = 0,$$

et surtout que l'emploi des formules générales de résolution de l'équation $x^2 - 2y^2 = -1$,
qui nécessiteraient d'énormes multiplications.

Remarque. — La question 87 est susceptible d'une intéprétation géométrique assez curieuse. Elle revient en effet à la suivante :

Trouver les triangles rectangles dont les trois côtés soient exprimables en NOMBRES ENTIERS, *ces triangles différant aussi peu que possible des triangles isoscèles.*

En effet, l'équation $\frac{m(m+1)}{2} = n(n+1)$

peut s'écrire sous la forme suivante :

$$m^2 + (m+1)^2 = (2n+1)^2.$$

Ainsi m, $m+1$, $2n+1$ doivent représenter les côtés d'un triangle rectangle, et la différence des côtés de l'angle droit étant égale à 1, est aussi faible que possible, puisqu'elle ne peut pas être zéro et qu'elle doit être un nombre entier. G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

368. — Un arc de parabole touche les côtés d'un angle droit yOx aux points A, B. Construire le cercle inscrit au triangle formé par les côtés OA, OB et l'axe AB.

(G. L.)

369. — Si l'on considère une strophoïde dont le nœud est le point O, deux transversales parallèles et symétriques par rapport au point O coupent cette courbe respectivement en des points A, B, C; A', B', C' tels que $OA.OB.OC = OA'.OB'.OC'$.

(E.-N. Barisien.)

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9264-4-93.

SUR LA DÉTERMINATION DES FACTEURS ÉTRANGERS INTRODUITS DANS L'ÉLIMINATION

Par M. **H. Laurent.**

(*Suite et fin*, voir page 97.)

2. — Pour éliminer x entre les équations

(1) $$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

(2) $$b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = 0,$$

où les a et les b sont indépendants de x, on emploie quelquefois la méthode suivante, assez rapide :

On multiplie (1) par b_0 et (2) par a_0 et l'on retranche, on élimine ainsi x^m et on a une équation

(3) $$c_0x^{m-1} + c_1x^{m-2} + \ldots + c_{m-1} = 0,$$

de degré $m - 1$; on multiplie ensuite (1) par b_m et (2) par a_m; on retranche puis on divise par x; on a ainsi une seconde équation de degré $m - 1$:

(4) $$d_0x^{m-1} + d_1x^{m-2} + \ldots + d_{m-1} = 0.$$

En opérant sur le système (3), (4) comme sur (1), (2) on abaisse encore d'une unité le degré de ces équations, et ainsi de suite. L'équation de degré 0, sur laquelle on tombe en éliminant x entre les équations du premier degré est-elle la résultante du système (1), (2)?

Évidemment non, car la résultante des équations (3), (4) n'est pas celle des équations (1), (2); mais on peut diriger les calculs de manière à obtenir la vraie résultante, comme il suit. A cet effet, observons que si λ, μ, λ', μ' ne contiennent pas x, la résultante de

$$\lambda\varphi + \mu\psi = 0,$$
$$\lambda'\varphi + \mu'\psi = 0,$$

sera la résultante de $\varphi = 0$, $\psi = 0$, multipliée par $(\lambda\mu' - \mu\lambda')^m$, m désignant le degré de φ et ψ supposées de même degré. Cela est évident si l'on met les résultantes de $\varphi = 0$, $\psi = 0$, sous la forme $\Sigma \pm k_{11}\, k_{22} \ldots k_{mm} = 0$, en posant

$$k_{ij} = \frac{\varphi(a_i)\varphi(a_j) - \varphi(a_j)\psi(a_i)}{a_i - a_j},$$

chaque élément de la nouvelle résultante se trouvant multiplié par $\lambda\mu' - \mu\lambda'$.

Si donc on désigne, pour abréger, par $\varphi = 0$, $\psi = 0$, les équations (1) et (2) on voit que la résultante de

$$b_0\varphi - a_0\psi = 0, \qquad b_m\varphi - a_m\psi = 0,$$

sera

$$R(b_0a_m - a_0b_m)^m = 0,$$

$R = 0$ désignant la résultante cherchée de $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Ainsi la résultante de (3), (4), c'est-à-dire celle des équations

$$b_0\varphi - a_0\psi = 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{b_m\varphi - a_m\psi}{x} = 0$$

est

$$\frac{R(b_0a_m - a_0b_m)^m}{b_0\varphi(o) - a_0\psi(o)} = R(b_0a_m - a_0b_m)^{m-1} = 0.$$

Il sera donc facile, après chaque opération, de calculer le facteur étranger introduit et par suite d'obtenir la véritable résultante. Cette méthode peut s'étendre à un nombre quelconque d'équations.

ÉTUDE SUR LES CUBIQUES CIRCULAIRES

(DÉFINITIONS, TANGENTES ET NORMALES, QUADRATURES)

Par M. **Jan Cyane**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir page 99.)

QUATRIÈME DÉFINITION

Reprenons le cercle Γ et la droite Δ, avec le point fixe O sur le cercle. Sur la sécante variable OPQ, prenons OM = QP, pour définir la cubique circulaire *(fig. 7)*.

Maintenant, par ce point M, menons la droite MT faisant avec MQ l'angle $\widehat{TMQ}$ égal à l'angle TQM. — Je dis que cette droite TM enveloppe un cercle dont le centre est le point D, pris sur le diamètre OC, à une distance OD égale au rayon OC.

Pour le démontrer, considérons le point M′ symétrique de M par rapport au point O; et, par ce point, menons M′T′ parallèle à MT. Nous formons ainsi un triangle T′M′Q isoscèle comme le triangle TMQ, et le point C se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu de la base M′Q.

En effet, C est sur la perpendiculaire élevée au milieu de la corde OP, et ce milieu est aussi le milieu de M′Q, puisque M′O = PQ.

Donc le point C est équidistant des côtés égaux T′M′ TQ du triangle; donc les deux perpendiculaires CV et CG sont égales.

Abaissons maintenant DU perpendiculaire à MT. Les deux

quadrilatères OMUD et OM'VC, symétriques par rapport au point O, sont égaux.

Donc DU = CV; par suite, DU = CG.

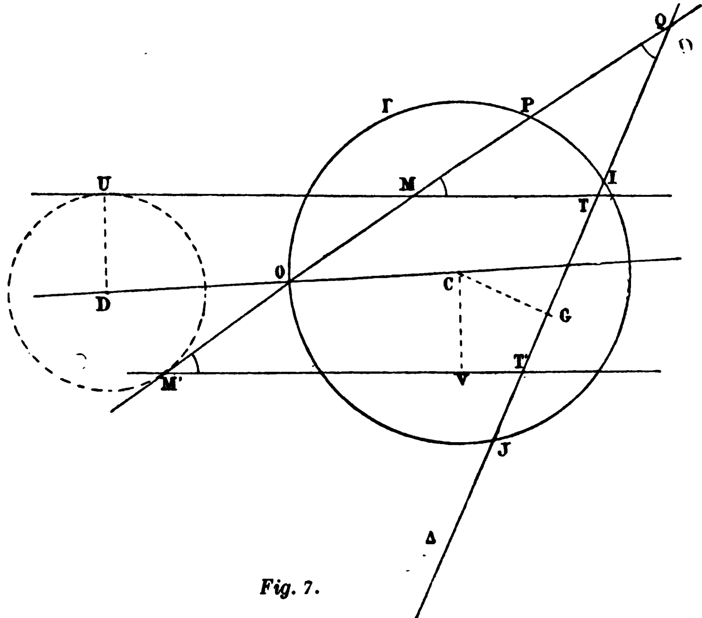


Fig. 7.

Ainsi, la longueur DU est constante et la droite MT enveloppe un cercle.

Définition. — De là résulte une nouvelle définition des cubiques circulaires.

En effet, à cause de l'égalité des angles en M et en Q, UM

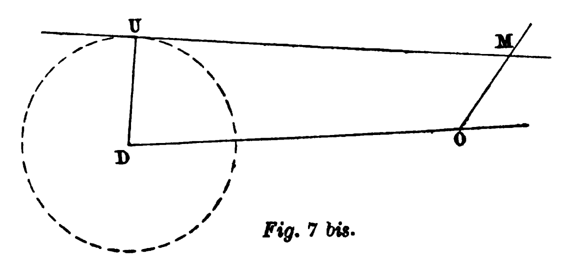


Fig. 7 *bis*.

tourne deux fois plus vite que la sécante OM, et l'on peut dire *(fig. 7 bis)* que :

Étant donnés un cercle et un point fixe O *de son plan, on considère une tangente* UM *tournant autour du cercle et un rayon* OM *tournant autour du point* O. *Si la vitesse angulaire de la tangente est double de celle du rayon, le lieu de leur point d'intersection* M *est une cubique circulaire.*

Normale. — Cherchons à construire la normale aux courbes

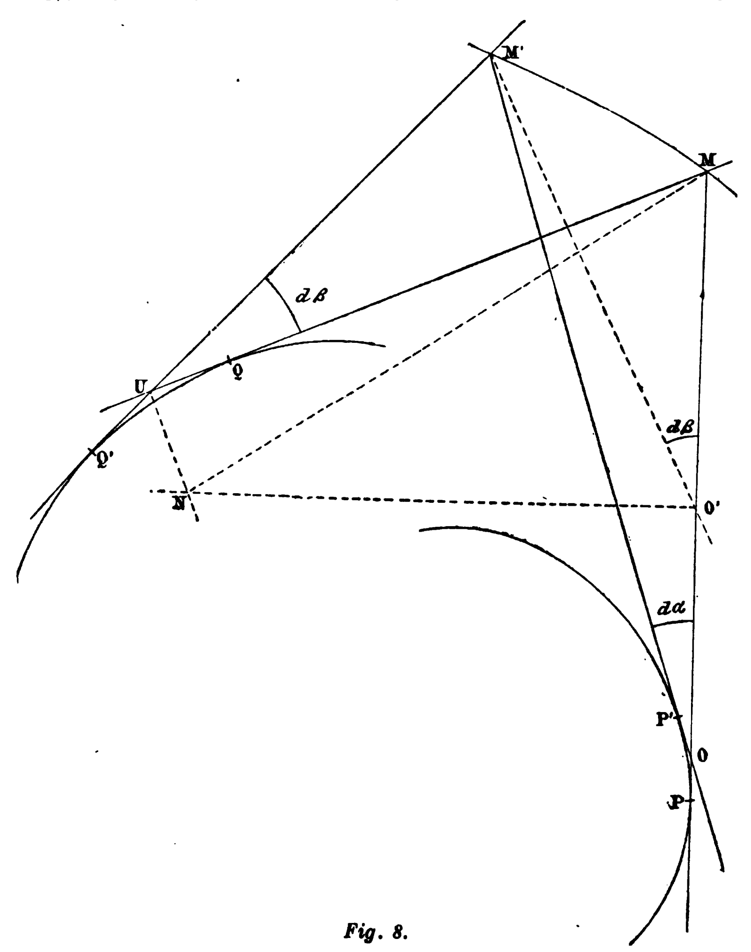


Fig. 8.

définies au moyen du *système de coordonnées* dites *tangentielles biangulaires (fig. 8).*

Chaque point M est l'intersection de deux droites (ou tangentes) qui enveloppent chacune une certaine courbe PP′ en QQ′. On donne, de plus, une relation:

$$f(\alpha, \beta) = 0,$$

entre les coordonnées angulaires α et β de ces deux droites, coordonnées qui sont simplement les angles variables qu'elles forment avec des directions fixes.

Soient $d\alpha$ et $d\beta$ les variations élémentaires de ces angles α et β, correspondant au point infiniment voisin M′. La normale au point M dépend seulement de leur rapport.

Pour la trouver, considérons les points U et O, intersections des tangentes infiniment voisines, et soit O′ le point où le cercle circonscrit au triangle UM′M coupe encore MO.

Ce cercle, et la courbe lieu de M, ont à la limite, la même normale MN en M, puisqu'ils ont même tangente. Pour construire le point N, on élève donc UN perpendiculaire à UM et O′N perpendiculaire à O′M.

Reste à trouver la position limite de O′.

Or:
$$\frac{\mathrm{MO'}}{\mathrm{MO}} = \frac{\mathrm{M'O'}}{\mathrm{M'O}};$$

et, dans le triangle M′OO′, d'après le rapport des sinus des angles aux côtés:
$$\frac{\mathrm{M'O'}}{\mathrm{M'O}} = \frac{\sin d\alpha}{\sin d\beta} = \frac{d\alpha}{d\beta}.$$

Donc
$$\frac{\mathrm{MO'}}{\mathrm{MO}} = \frac{d\alpha}{d\beta},$$
ce qui définit le point O′.

Remarque (fig. 9). — Au point O, élevons la perpendiculaire ON′ à OM, et soit N′ son intersection avec la normale MN.

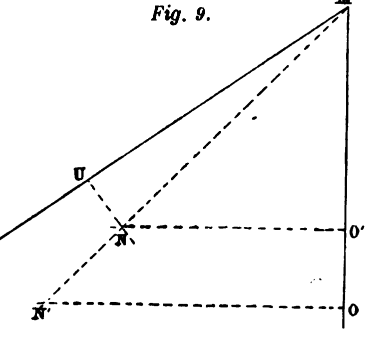


Fig. 9.

A cause des triangles semblables:

$$\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MN'}} = \frac{\mathrm{MO'}}{\mathrm{MO}} = \frac{d\alpha}{d\beta}.$$

Donc les sous-normales ON′, UN divisent la normale MNN′ en segments inversement proportionnels aux variations angulaires correspondantes $d\alpha$ et $d\beta$.

Application à la cubique circulaire. — D'après la quatrième définition de cette courbe :

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{1}{2}.$$

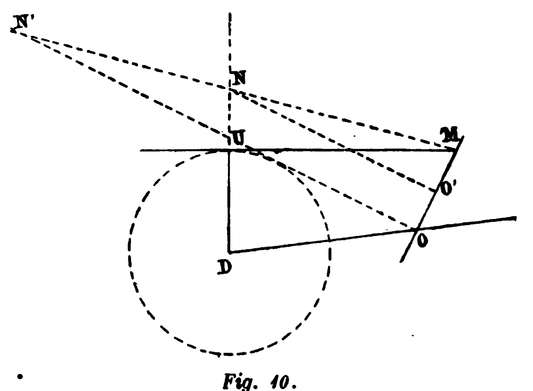


Fig. 10.

Donc au point O', milieu de MO (*fig. 10*), élevons la perpendiculaire O'N à OM. Elle rencontre en N la perpendiculaire DU à UM, et MN est la normale en M.

Si l'on mène ON' perpendiculaire à OM, on a :

$$2MN = MN',$$

$$\frac{MN}{MN'} = \frac{1}{2}.$$

CINQUIÈME DÉFINITION

Un plan mobile glisse sur un plan fixe, de telle manière qu'un de ses points, E, décrit une droite EK du plan fixe et qu'une de ses droites DK tourne autour d'un point D, du plan fixe (*fig. 11*).

Si la distance EH du point E à la droite DK est égale à la distance DG du point G à la droite EK, tout point M du plan mobile décrit une cubique circulaire.

Démonstration. — Puisque EH = DG, les droites DG et EH se coupent en un point L de la bissectrice KL de l'angle $\widehat{DKE}$.

Soit M un point quelconque du plan mobile; tirons EM, et soit B le point où cette droite coupe DK. Le point B est évidemment fixe dans le plan mobile, et les longueurs EM et EB sont constantes.

Soit DA symétrique de EB par rapport à la bissectrice KL, et soit encore, sur DA, le point O symétrique de M

par rapport à cette même bissectrice. — Les points A et O sont des points fixes, et

$$DO = EM.$$

Traçons OM : cette droite, perpendiculaire à KL, comme l'est DE, est parallèle à DE.

Soit Q son point de rencontre avec EQ, parallèle à DO et

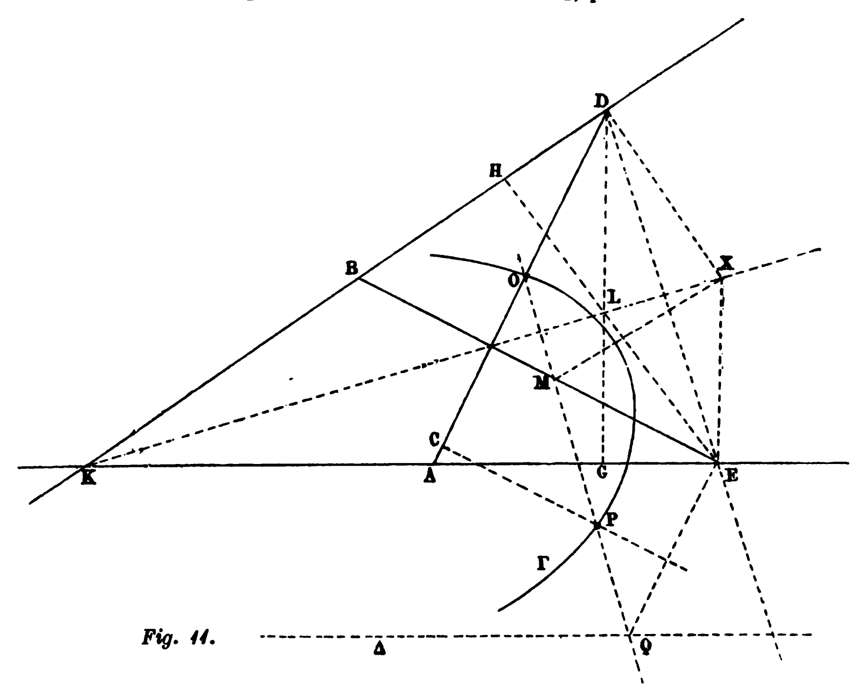


Fig. 11.

de direction constante par conséquent ODEQ est un parallélogramme, et EQ = DO.

Donc, le lieu du point Q est une droite Δ parallèle à EK

Prenons maintenant, sur DO, le point C tel que :

$$OC = OD = ME = EQ.$$

Par ce point menons, CP parallèle à ME.

Soit P son point de rencontre avec OM. — Je dis que le lieu de P est le cercle Γ de centre C et de rayon CO.

En effet les triangles COP et MEQ sont égaux. Or MEO est isoscèle; donc COP l'est aussi, et CP = CO.

De plus : $OP = MQ$,
donc $OM = PQ$,
et le lieu de M est défini au moyen du cercle Γ et de la droite Δ selon la première définition.

Normale. — Le centre instantané de rotation du plan mobile, par rapport au plan fixe, est le point X situé sur la bissectrice KL, à l'intersection de la perpendiculaire EX à EK et de la perpendiculaire DX à DK.

D'après la théorie des roulettes, la normale en M est donc la droite MX.

Remarque. — Le lieu du point X, dans le plan mobile, est la parabole dont le foyer est E, et dont la directrice est DK.

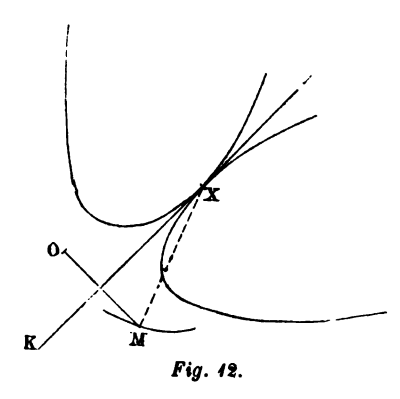


Fig. 12.

Le lieu du point X, dans le plan fixe, est la parabole dont le foyer est D et dont la directrice est EK.

Ces deux paraboles sont égales, puisque leurs paramètres DG et EH sont égaux. De plus elles sont, dans le mouvement continu, constamment symétriques par rapport à leur tangente commune XK, au point de contact.

De là, résulte une nouvelle définition.

SIXIÈME DÉFINITION

Les cubiques circulaires sont les courbes engendrées par les divers points du plan d'une parabole qui roule sur une parabole égale et symétrique par rapport à la tangente, au point de contact des deux courbes *(fig. 12)*.

Centre de courbure. — Le centre de courbure des cubiques circulaires se construit, conformément à la théorie des roulettes, au moyen des centres de courbure des deux paraboles, lesquels sont connus.

SEPTIÈME DÉFINITION

Reprenons la cinquième définition.

La droite KX enveloppe donc la parabole dont le foyer est D et dont la directrice est EK.

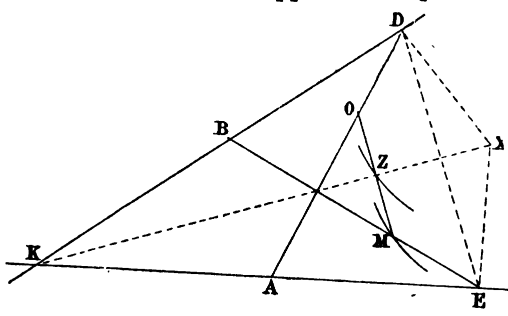


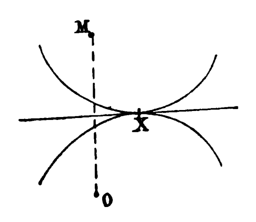
Fig. 13.

Le point O est fixe et symétrique du point mobile M qui décrit la cubique circulaire.

Le milieu Z de OM décrit, d'ailleurs, la podaire de la parabole lieu de X par rapport au point O. Le point M décrit une courbe homothétique et de grandeur double.

Ainsi, c'est une propriété bien connue d'ailleurs, les cubiques circulaires sont les podaires de paraboles par rapport aux divers points du plan de celles-ci.

Remarque. — On pourrait appeler « podoïdes » d'une courbe, les courbes obtenues en prenant les symétriques d'un même point par rapport aux tangentes de cette courbe et qui sont homothétiques aux podaires de cette même courbe.



Ces podoïdes s'engendrent encore en faisant rouler sur cette courbe une autre courbe égale et symétrique par rapport à la tangente au point de contact. Cette définition permet de construire leur centre de courbure, connaissant celui de la courbe dont elles dérivent. Par homothétie, on en déduit celui des podaires. (*)

(*) Le mémoire de M. Jean Cyane renferme une seconde partie que nous publierons prochainement.

SUR UN THÉORÈME DE JAMES GREGORY

Par M. **A. Aubry.**

1. — *Soient deux courbes* AM, am, *une droite* OP *et un point fixe* o: *si les deux courbes sont telles que, prenant deux arcs égaux* AM, am, *et abaissant la perpendiculaire* MP *à* OP, MP *soit égale à* om, *la première courbe est l'*involuta *de la seconde qui est l'*evoluta *de la première; la droite* OP *est la* droite d'involution, *et le point* o *le* centre d'évolution.

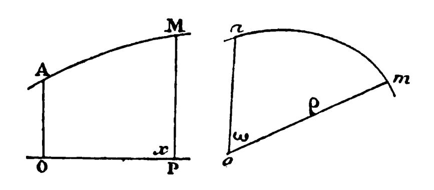


fig. 1.

Ces deux courbes, ainsi associées, jouissent de la propriété suivante, 1° la surface AMPO *est double de celle du secteur* aom, *2° les tangentes en* M *et en* m *font des angles égaux avec les droites* MP, mo.

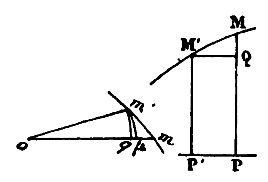


Fig. 2.

Considérons les éléments égaux MM′ mm', abaissons M′Q,$m'q$ perpendiculaires à MP et mo puis rabattons om en $o\mu$. A cause de l'angle infiniment petit $m'o\mu$, $o\mu$ ne diffère de oq que d'un infiniment petit du second ordre: on peut donc poser mq = MQ, et comme on a déjà M′M = $m'm$, il s'ensuit: 1° que M′Q = $m'q$, d'où, en négligeant les infiniment petits du second ordre (tri MM′Q et tri $mm'q$)

$$\text{surf } M'P = 2 \text{ surf } omm',$$

à cause des longueurs égales PM′, om';

2° Que les angles M′MQ, $m'mq$ sont égaux, donc les tangentes aux points correspondants des deux courbes font des angles égaux avec l'ordonnée et le rayon vecteur.

On voit que l'égalité des surfaces ou de l'inclinaison des tangentes caractérise, aussi bien que l'égalité des arcs, la relation d'*involuta* à *evoluta*.

2. — On peut encore définir analytiquement cette relation. En effet, aux points M et m, on a $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ et $\sqrt{\rho^2 d\omega^2 + d\rho^2}$ pour les expressions des éléments des deux courbes, lesquels éléments sont égaux. Remplaçons y par la quantité égale ρ; élevant au carré, on trouve en réduisant

$$dx = \rho d\omega.$$

On a donc les relations

$$(1) \qquad y = \rho, \qquad x = \int \rho d\omega.$$

Ce théorème a été donné, par Gregory, dans l'ouvrage intitulé *Geometriæ pars universalis* (Padoue, 1668) et démontré à la manière des Anciens. (Voir la note I.)

3. — *La cycloïdale* (*) *et la podaire d'une même courbe ont entre elles la relation d'*involuta *à* evoluta.

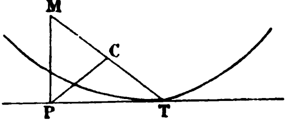


Fig. 3.

La courbe AT étant considérée comme roulant sur PT en entraînant le point M, la normale à la cycloïdale, lieu du point M, est la droite MT, joignant M au point de contact (théorème de Descartes).

Supposant la courbe PT fixe, ainsi que le point M, et la droite PT roulant sur elle, les perpendiculaires abaissées de M sur cette droite dans ses diverses positions sont évidemment égales aux ordonnées MP de la cycloïdale. De plus, la normale à la podaire, lieu du point P, étant la médiane PC du triangle MPT (théorème de Barrow), les angles CPM, PMT seront égaux. Ainsi pour des rayons de la podaire égaux aux ordonnées de la cycloïdale, les inclinaisons des tangentes sur ces droites sont égales. C. Q. F. D.

On a ainsi une nouvelle démonstration du théorème de Steiner :

Les arcs correspondants de la cycloïdale et de la podaire d'une même courbe sont égaux, et la surface correspondant à la première est double de celle qui correspond à la seconde. (Journal de Crelle, 1840).

4. — *1° Si une courbe quelconque* B *roule sur son* involuta

(*) Ou *la roulette.*

A, *suivant qu'elle roule à l'intérieur ou à l'extérieur, le centre d'évolution a pour trajectoire la base d'involution ou une anticaustique* (*) *de l'*involuta A; *le rayon étant perpendiculaire à la base.*

2° *Si* A *roule sur son* evoluta B, *suivant que le mouvement a lieu à l'intérieur ou à l'extérieur, la base d'involution enveloppe le centre d'évolution ou l'épicycloïdale* (**) *de l'*evoluta, *c'est-à-dire son anticaustique, les rayons étant parallèles.*

1° Dans le premier cas, le rayon vecteur MP reste constamment perpendiculaire à Ox; et comme il est partout égal à l'ordonnée, on voit que son extrémité décrit la droite Ox.

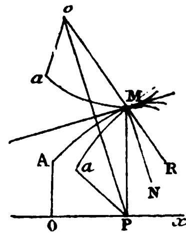


Fig. 4.

Dans le second cas, menons la tangente MT, la normale MN et tirons P*o*: le point *o* est toujours symétrique du pied P de l'ordonnée du point M; donc les angles T*o*M, TPM sont égaux, de même que les angles PMN, NMR : la droite OMR est donc tangente à la caustique désignée.

2° Démonstration analogue à la précédente.

Le premier de ces quatre théorèmes est dû à M. Habich (*Mathesis*, 1882).

On peut voir également des propositions du même genre dans le XXe cahier du *Journal de l'École polytechnique* (1863, Mannheim). Voir aussi *Journal de Liouville*, 1859, id., et dans les *N. A.* (1856, p. 102) une Note de M. Catalan.

5. — Soit à trouver l'*involuta* de la circonférence représentée par $\rho = \cos\omega$. On a

$$(2) \qquad y = \rho, \quad x = \int \cos\omega \, d\omega = -\sin\omega;$$

d'où, pour l'équation cherchée,

$$x^2 + y^2 = 1;$$

(*) Caustique secondaire par réflexion, ou bien podaire homothétique double.

(**) Trajectoire d'un point du plan d'une courbe roulant sur une autre égale et symétrique.

A propos de cet article, le lecteur pourra consulter le livre de M. W. Besant : *Exercices pour la licence.* Des extraits de cet ouvrage ont été publiés dans les N. A. 1871, pp. 284, 324, 432, 474, 553.

c'est donc un cercle de rayon double, ce que la géométrie élémentaire suffirait à démontrer.

On en conclut que *quand une circonférence roule à l'intérieur d'une circonférence de rayon double, la cycloïdale d'un point quelconque de la circonférence mobile est un diamètre de la circonférence fixe.* (Théorème de Cardan.)

L'anticaustique d'une circonférence, les rayons étant parallèles, n'est autre chose que l'épicycloïde décrite par un point quelconque d'une circonférence de rayon moitié moindre, roulant à l'extérieur de la première. Par suite, la caustique, ou développée de l'anticaustique est une épicycloïde semblable. (Tschirnhausen.)

Soit une circonférence fixe A*: une circonférence de rayon double* B *roule sur* A *de manière à l'envelopper constamment. Un diamètre quelconque passe par un point fixe. Si au contraire* B *roule extérieurement sur* A, *un diamètre quelconque enveloppe une cardioïde.*

6. — Soit à trouver l'*involuta* de la rosace (voir note II) $\rho = \sin m\omega$. On a

$$(3) \qquad y = \rho, \quad x = \int \sin m\omega \, d\omega = -\frac{1}{m}\cos m\omega,$$

dont l'équation est $\quad y^2 + mx^2 = 1.$

Ainsi l'*involuta* d'une rosace est une ellipse.

De là, le moyen de mener la tangente à cette courbe, de la quarrer et de la rectifier.

Si la rosace roule extérieurement sur l'ellipse, le centre décrira une circonférence et si elle roule intérieurement, il décrira l'axe focal.

7. — Soit à trouver l'*involuta* du limaçon représenté par $\rho = a \cos \omega + b$. On a

$$(4) \qquad y = a\cos\omega + b, \quad x = \int (a\cos\omega + b) d\omega = a \sin\omega + b\omega;$$

l'*involuta* d'un limaçon est une trochoïde, ce qui découle immédiatement de la propriété du limaçon d'être la podaire de la circonférence.

On sait (théorème de Pascal) que la trochoïde est rectifiable par un arc d'ellipse et que, à chaque trochoïde à boucle correspond une trochoïde à inflexions, laquelle a ses arcs égaux à ceux de la première. De même, *le limaçon se rectifie par un*

arc d'ellipse; et à chaque limaçon à boucle correspond un limaçon à inflexions, dont les arcs sont égaux aux siens.

En particulier, *les arcs correspondants de la cycloïde et de la cardioïde sont équivalents.*

Le n° 4 montre que *si un limaçon roule à l'intérieur de la trochoïde correspondante, son sommet (point conjugué ou point double) parcourt la base de la trochoïde.* Ce théorème a été donné par Gilbert, dans les *Mémoires de l'Académie de Belgique*, 1857, pour le cas de la cardioïde.

Le n° 4 peut donner d'autres théorèmes analogues.

8. — La podaire du foyer d'une parabole est une droite, donc *l'evoluta de la cycloïdale du foyer d'une parabole (chaînette) est une droite.* Cette courbe est donc absolument quarrable et rectifiable.

La podaire du sommet d'une parabole est une cissoïde, donc *l'evoluta de la cycloïdale du sommet d'une parabole est une cissoïde.* Cette courbe est donc quarrable et rectifiable, au moyen des arcs de cercle.

Il en est de même de *l'élastique*, qui est la cycloïdale du foyer d'une conique, puisque la podaire du foyer de cette conique est une circonférence.

La podaire du centre de la lemniscate étant la courbe représentée par

$$\rho^{\frac{2}{3}} = \sin \frac{2}{3}\,\omega,$$

cette courbe a ses arcs égaux à ceux de la cycloïdale de la lemniscate. Il en est de même pour $\rho = \left(\sin \frac{\omega}{3}\right)^3$ et pour la cycloïdale du sommet de la cardioïde; pour ceux de la lemniscate et pour ceux de la cycloïdale du foyer de l'hyperbole équilatère; et en général des arcs de la courbe

$$(5) \qquad \rho^{\frac{n}{n+1}} = \sin \frac{n}{n+1}\,\omega$$

et de ceux de la cycloïdale de la courbe $\rho^n = \sin n\omega$.

L'emploi des théorèmes du n° 4 peut mener, également, à plusieurs remarques intéressantes.

(A suivre.)

NOTE SUR QUELQUES PROPRIETÉS
DE LA PARABOLE ET DE SA DÉVELOPPÉE
OBTENUES EN CONSIDÉRANT CES COURBES COMME UNICURSALES

Par M. E.-N. **Barisien**, ancien élève de l'École Polytechnique.

1. — Soit m le coefficient angulaire d'une normale, en $M(x_1, y_1)$ à la parabole. On sait que l'équation de cette normale est

$$(1) \qquad y = m(x - p) - \frac{pm^3}{2},$$

la parabole étant rapportée à son axe et à la tangente au sommet.

Pour obtenir l'enveloppe de cette normale, on exprime ordinairement que l'équation (1) a une racine double en m, ce qui donne, pour l'équation de la développée de la parabole,

$$27py^2 = 8(x - p)^3.$$

Mais il est préférable, dans le but d'obtenir facilement un certain nombre de propriétés intéressantes sur la parabole et sa développée, d'exprimer x et y en fonction du paramètre m.

On a, d'abord,

$$M \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{pm^2}{2}, \\ y_1 &= -pm. \end{aligned} \right.$$

Pour avoir les coordonnées (X, Y) du point C de la développée, point qui est le centre de courbure correspondant au point M, nous différentierons l'équation (1) par rapport à m, ce qui donne

$$C \left\{ \begin{aligned} X &= p + \frac{3pm^2}{2}, \\ Y &= pm^3. \end{aligned} \right.$$

Cherchons maintenant les coordonnées ξ et η du second point d'intersection C′ de la normale, en M, avec la développée.

En considérant la développée comme unicursale, les formules

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= p + \frac{3pt^2}{2}, \\ y &= pt^3, \end{aligned} \right.$$

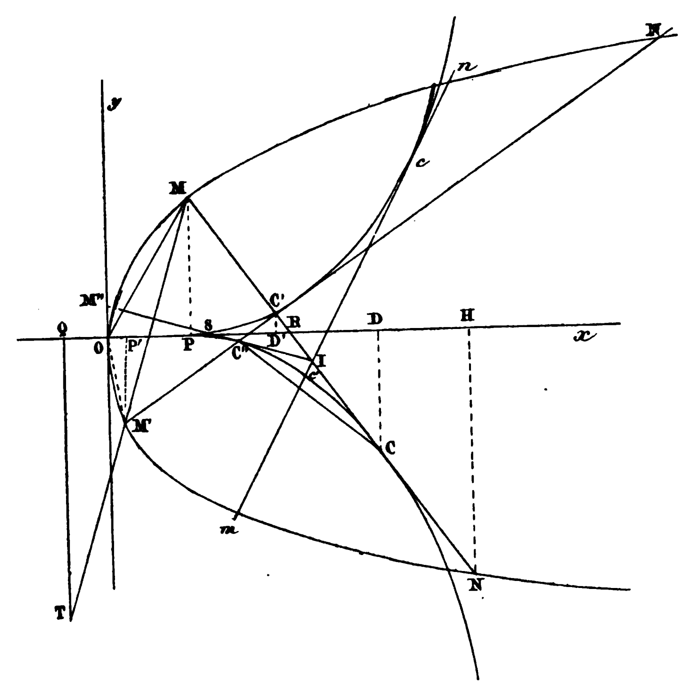
permettent de trouver l'intersection de la courbe avec une normale quelconque dont le coefficient angulaire est m. En transportant les valeurs (2) dans (1), on obtient l'équation

$$2t^3 - 3t^2m + m^3 = 0,$$

qui n'est autre que

$$(t - m)^2(2t^2 + m) = 0.$$

La racine double $t = m$ correspond, comme on devait s'y attendre, au centre de courbure C.



Quant à la valeur $t = -\frac{m}{2}$, elle correspond au point C', et montre que la tangente en C', à la développée, est une normale à la parabole, de coefficient angulaire $-\frac{m}{2}$. Par con-

séquent, pour avoir les coordonnées de C′, il suffira de changer, dans celles de C, m en $-\frac{m}{2}$. On écrira donc

$$C' \left\{ \begin{aligned} \xi &= p + \frac{3pm^2}{8}, \\ \eta &= -\frac{pm^3}{8}, \end{aligned} \right.$$

Il est intéressant de donner aussi les coordonnées x' et y' du second point de rencontre N de la normale, en M, avec la parabole. On sait que l'ordonnée y' de N est, en fonction de celle y_1, de Mφ :

$$y' = -y_1 - \frac{2p^2}{y_1}.$$

Il en résulte donc, pour les coordonnées du point N :

$$N \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{p(m^2+2)^2}{2m^2}, \\ y' &= \frac{p(m^2+2)}{m}, \end{aligned} \right.$$

2. — En changeant m en $-\frac{m}{2}$, dans les cordonnées des trois points M, C′ et N, on obtient les coordonnées des points analogues M′, C″ et N′ :

$$M' \left\{ \begin{aligned} x_2 &= \frac{pm^2}{8}, \\ y_2 &= \frac{pm}{2}, \end{aligned} \right.$$

$$C'' \left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= p + \frac{3pm^2}{32}, \\ \eta_1 &= \frac{pm^3}{64}, \end{aligned} \right.$$

$$N' \left\{ \begin{aligned} x_1' &= \frac{p(m^2+8)^2}{8m^2}, \\ y_1' &= -\frac{p(m^2+8)}{2m}. \end{aligned} \right.$$

De même, en changeant m en $-\frac{m}{2}$, dans ces formules,

on aurait les coordonnées des points correspondants sur la tangente à la développée en C″ et ainsi de suite.

3. — Comme conséquence de ces diverses formules, nous allons déduire quelques relations.

On voit immédiatement que

$$y_2 = -\frac{y_1}{2}, \qquad x_2 = \frac{x_1}{4},$$
$$X - p = 4(\xi - p), \qquad Y = -8\eta.$$

Si l'on appelle P et P′ les projections sur l'axe de la parabole, des points M et M′; D et D′ celles de C et C′; R le point de rencontre de la normale avec l'axe ; O le sommet de la parabole ; S celui de la développée ; on a donc

$$\mathrm{OP} = 4\mathrm{OP}',$$
$$\mathrm{MP} = 2\mathrm{M'P'}.$$

De même
$$\mathrm{CD} = 8\mathrm{C'D'},$$
$$\mathrm{SD} = 4\mathrm{SD'}.$$

D'où l'on déduit
$$\mathrm{PP'} = 3\mathrm{OP'},$$
$$\mathrm{DD'} = 3\mathrm{SD'}.$$

Mais
$$\xi = p + \frac{3}{4}x_1;$$

donc
$$\mathrm{SD'} = \frac{3}{4}\mathrm{OP} = 3\mathrm{OP'}.$$

Par conséquent
$$\begin{cases} \mathrm{PP'} = 3\mathrm{OP'}, \\ \mathrm{DD'} = 9\mathrm{OP'}, \end{cases}$$

et, par suite,
$$3\mathrm{PP'} = \mathrm{DD'}.$$

Cette dernière relation peut s'énoncer ainsi :

Étant donnée une corde MM′ *d'une parabole, si l'on considère les deux centres de courbure* C *et* C′ *correspondant à* M *et à* M′, *la projection de la distance* CC′, *sur l'axe de la parabole, est triple de la projection de la corde* MM′ *sur le même axe.*

4. — La relation
$$\mathrm{CD} = 8\mathrm{C'D'}$$
revient à
$$\mathrm{RC} = 8\mathrm{RC'},$$
et peut s'énoncer de la façon suivante :

Toute tangente à la développée, intercepte sur la courbe une corde qui est coupée, par l'axe, dans le rapport de 1 *à* 8.

Il est facile de voir que l'on a aussi

$$SR = \frac{SD}{3} = OP,$$

c'est-à-dire que : *toute tangente à la développée intercepte sur l'axe, à partir du sommet de la développée, un segment égal au $\frac{1}{3}$ de la distance du sommet à la projection du point de contact, sur le même axe.* (*A suivre*).

CORRESPONDANCE

A propos de la Question 87, résolue dans le dernier numéro, M. Boutin nous adresse la lettre suivante :

Ainsi que vous le faites remarquer, la résolution de

$$\frac{m(m+1)}{2} = n(n+1),$$

se ramène à celle de

$$(1) \qquad x^2 + (x+1)^2 = z^2.$$

La résolution de (1) répond aux solutions de :

$$(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2,$$

où

$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 5, \quad \alpha_4 = 12, \quad \alpha_5 = 29, \quad \alpha_6 = 70..,$

$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 2, \quad \beta_4 = 5, \quad \beta_5 = 12, \quad \beta_6 = 29...;$

séries que l'on peut poursuivre indéfiniment, car

$$(2) \qquad \beta_n = \alpha_{n-1} \quad \text{et} \quad \alpha_n = 2\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}.$$

Les nombres α_n sont les coefficients des différentes puissances de y dans le développement, ordonné suivant les puissances croissantes de y, de

$$\frac{1}{1 - 2y - y^2}.$$

La formule de récurrence (2) permet d'obtenir l'expression générale de α_n en fonction de n seulement. On trouve :

$$\alpha_n = \alpha^{n-1} + \frac{n-2}{1}\alpha^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}\alpha^{n-5}$$
$$+ \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}\alpha^{n-7} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.2.3.4}\alpha^{n-9} + \dots$$

la loi est manifeste, et se démontre aisément.

On a donc, pour la solution générale de (1),

$$(\alpha_n^2 - \alpha_{n-1}^2)^2 + (2\alpha_n\alpha_{n-1}) = (\alpha_n^2 + \alpha_{n-1}^2)^2.$$

Les nombres z, de la formule (1), sont les nombres α d'indice impair, on a donc, entre les nombres α, la relation :

$$\alpha_{2n+1} = \alpha_n^2 + \alpha_{n+1}^2.$$

Les nombres x, de la même formule, sont $\sum_{n=1}^{n=2p} \alpha_n$; ce qui fournit encore les deux relations :

$$\alpha_{2p}^2 - \alpha_{2p-1}^2 = \sum_1^{4p-2} \alpha_n$$

$$2\alpha_{2p}\,\alpha_{2p+1} = \sum_1^{4p} \alpha^n.$$

Les triangulaires, dont les moitiés sont également des triangulaires, sont donc de la forme

$$\alpha_n\alpha_{n-1}(\alpha_n^2 - \alpha_{n-1}^2).$$

BIBLIOGRAPHIE

Théorie des plans hypercycliques des surfaces du second degré, par Joseph Gillet, docteur ès sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Ecole Abbatiale de Maredsous (Belgique). — Chez l'Auteur; prix, 1 fr. 50 c.

Les plans qui coupent une quadrique suivant des hyperboles équilatères sont appelés, dans cet opuscule, *plans hypercycliques*. J'ignore si le nom est nouveau; mais il est bien choisi et il peut être adopté; l'hyperbole équilatère et la circonférence pouvant être réunies, comme l'a observé Transon (*), dans une même définition en considérant l'ordonnée comme égale à la moyenne géométrique des segments déterminés sur l'axe par le pied de cette ordonnée. Dans cette manière de voir et comme l'a proposé Transon *(loc. cit.)*, l'hyperbole équilatère peut être appelée *hypercycle*. On arrive ainsi à la dénomination proposée par M. Gillet et dont nous devions l'explication à nos lecteurs.

Dans sa brochure, M. Gillet reproduit plusieurs calculs qui, comme le lieu des points d'où partent deux génératrices rectangulaires, sont classiques dans les cours de mathématiques spéciales. En partant de l'équation de Sedley Taylor (**), relation qui se présente d'elle-même au début de cette étude, il examine alors différents problèmes pouvant donner lieu à d'intéressants exercices; nous citerons les principaux

Enveloppe des plans diamétraux hypercycliques. — Cette enveloppe est

(*) *N. A.* 1846, p. 535.

(**) Voyez: *N. A.*, 1861, p. 268 et notre *G. A.*, p. 287.

un cône du second degré homofocal au supplémentaire du cône asymptote de la quadrique donnée.

Enveloppe des plans hypercycliques passant par un point donné.

Lieu des centres des sections hypercycliques. — Ce lieu est un cône dont le supplémentaire est homofocal au supplémentaire du cône asymptote. Il coupe la quadrique donnée suivant une conique sphérique située sur la sphère de Monge, et cette conique sphérique est une ligne à courbure moyenne nulle de l'hyperboloïde.

Enveloppe des sections diamétrales dont un des axes (*) *est constant et égal au rayon de la sphère de Monge.* Cette enveloppe est le cône des centres des sections hypercycliques.

Nous citerons encore les théorèmes suivants :

1° *Les huit plans tangents, communs au cône des centres et au cône enveloppe, suivant les quatre génératrices communes, ont pour diamètres conjugués les huit génératrices de contact des quatre plans tangents qui correspondent à l'équation*

$$\frac{x}{a}\sqrt{(b^4-c^4)(2a^2+b^2-c^2)} \pm \frac{y}{b}\sqrt{(a^4-c^4)(2b^2-c^2+a^2)}$$
$$\pm \frac{r}{c}\sqrt{(a^4-b^4)(2c^2-a^2-b^2)} = 0.$$

2° *Les sections hypercycliques dont les carrés des axes sont proportionnels à* $A\ (a^2+b^2-c^2)$ *ont leurs centres distribués sur les quatre génératrices communes au cône enveloppe et au cône des centres*, etc.

L'opuscule de M. Gillet est un document intéressant sur un sujet très simple, sans doute, mais qui, au point de vue des exercices qui s'y rattachent, tout au moins, n'a peut-être pas été suffisamment exploré. Nous le recommandons à toute l'attention de nos collègues.

Récréations mathématiques, par Edouard LUCAS. 4 volumes petit in-8°, caractères elzévirs, titre en deux couleurs.

Tome Ier. — *Les Traversées.* — *Les Ponts.* — *Les Labyrinthes.* — *Les Reines* — *Le Solitaire.* — *La Numération.* — *Le Baguenaudier.* — *Le Taquin.* 2e édition, 1891. — Prix : hollande, 12 fr. ; vélin, 7 fr. 50 c. — Tome II. — *Qui perd gagne.* — *Les Dominos.* — *Les Marelles.* — *Le Parquet.* — *Le Casse-Tête.* — *Les Jeux de demoiselles.* — *Le Jeu icosien d'Hamilton*, 1883. — Prix : hollande, 12 fr. ; vélin, 7 fr. 50 — Tome III. — *Le Calcul sur les doigts.* — *Le Calcul et les machines à calculer.* — *Le Jeu du caméléon et le jeu des jonctions de points.* — *Le Jeu militaire et la prise de la Bastille.* — *Le Jeu américain et ses dérivés : amusements par les jetons.* — *L'Étoile nationale et les jeux de Rouge et Noire*, 1893. — Prix : hollande, 9 fr. 50 c. ; vélin, 6 fr. 50 c. — Tome IV. — *(Sous presse.)* (Librairie Gauthier-Villars.)

Extrait de l'avertissement du tome III.

Le 3 octobre 1891, Édouard Lucas succombait, dans toute la force de son talent, aux atteintes d'une courte et terrible maladie. Cette mort prématurée, — il n'était âgé que de quarante-neuf ans, — laissait un grand

(*) Il vaut mieux dire un *demi-axe*; mais c'est une erreur courante et que j'ai parfois commise moi-même. M. Catalan l'a relevée (*Journal*, p. 28), avec raison. Lorsqu'une ellipse est représentée par $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, les axes ont pour longueurs $2a$ et $2b$, respectivement, et non a et b, comme on le dit souvent.

vide dans la Science, en même temps qu'elle frappait de stupeur ses nombreux amis.

Préoccupée à juste titre de ne pas laisser perdre son héritage scientifique, la famille d'Édouard Lucas s'adressa à la Société Mathématique de France, à laquelle il appartenait depuis de longues années, et dont il avait été vice-président.

Répondant au vœu qui lui était ainsi exprimé, la Société désigna une commission, pour procéder au dépouillement et au classement des manuscrits laissés par Lucas. Cette commission s'est mise au travail; et l'un des premiers résultats de ses recherches a été la découverte de deux nouveaux volumes de *Récréations mathématiques*, à peu près entièrement préparés. C'est l'un de ces volumes qu'elle présente aujourd'hui au public.

Histoire de l'École polytechnique, par G. Pinet, ancien élève de l'École Polytechnique. Librairie polytechnique Baudry et Cie, éditeurs, Paris, 15, rue des Saints-Pères, Liège, rue Lambert-Lebègue, 19. — Prix, broché : 25 francs. Il a été tiré 25 exemplaires sur papier du Japon au prix de 100 francs. On peut se procurer séparément la collection des gravures, tirées sur papier du Japon au prix de 20 francs.

L'Histoire de l'École polytechnique est divisée en deux parties :

Dans la première, *Souvenirs et Traditions*, l'auteur montre les Polytechniciens vivant côte à côte, obéissant aux mêmes règlements, soumis aux mêmes travaux, aux mêmes épreuves, initiés par les camarades de l'année précédente aux usages, aux souvenirs, aux traditions de l'École et se transmettant de promotion en promotion les sentiments de devoir, de discipline, de loyauté, de justice, inspirés, dès l'origine, par les plus illustres maîtres.

M. G. Pinet, que sa position d'inspecteur des études à l'École avait mis à même de compulser les archives, de fouiller les bibliothèques, de recueillir les souvenirs d'anciens élèves de presque toutes les promotions, raconte la part glorieuse que ces jeunes gens ont prise aux grandes manifestations nationales et aux mouvements politiques, le concours efficace, dévoué, qu'ils ont apporté à toutes les entreprises où l'honneur du pays a été engagé, le patriotisme ardent dont ils ont donné tant de preuves. On voit comment l'École, née dans un grand mouvement démocratique, resta fidèle à son origine, et, conservant comme un héritage l'amour de la patrie et de la liberté, a mérité sa réputation, conquis la popularité.

Dans la seconde partie, *Organisation*, l'auteur montre comment l'Institution a été fondée par la Convention nationale, et comment son organisation a été modifiée depuis par tous les gouvernements qui se sont succédé.

L'ouvrage est illustré de 16 grandes gravures hors texte, d'après des compositions dans lesquelles H. Dupray, le peintre de sujets militaires, a représenté avec le talent qu'on lui connaît, les scènes principales de l'histoire de l'École et que le burin de Thiriat a habilement reproduites.

Imprimé avec le plus grand soin sur beau papier, par Georges Chamerot, cet ouvrage forme un magnifique volume grand in-8° de plus de 500 pages.

(*) Dans un prochain numéro je consacrerai quelques pages à l'analyse de cet important ouvrage. Je le signale simplement aujourd'hui à l'attention de ceux qui sont chargés de choisir les prix des jeunes candidats à l'École polytechnique. En leur donnant l'ouvrage de M. Pinet, ils sont sûrs d'ajouter, à la joie morale du lauréat, le plaisir de posséder un ouvrage dont il ne séparera jamais et qu'il relira plus d'une fois, toujours avec plaisir. G. L.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1893

On donne une conique S et un triangle conjugué ABC.

1° Démontrer que, par un point quelconque P, de S, passent quatre coniques circonscrites à ABC et touchant S, chacune, en un point, autre que P.

2° Les points où ces quatre coniques touchent S sont situés sur une conique S, circonscrite à ABC.

3° Quand P décrit S, S enveloppe une courbe T du quatrième ordre.

4° D'un point M de la courbe T, on peut mener à cette courbe quatre tangentes autres que celle qui touche la courbe en M. Démontrer que les points de contact sont sur une droite D et trouver l'enveloppe de D quand le point M décrit la courbe T.

EXERCICE ÉCRIT

68. — (A) Étant donnés un plan et deux sphères S, S′, de rayons R et R′, ayant leur centre dans ce plan, on considère une sphère variable, Σ, tangente aux deux premières et au plan. — On demande :

1° Le lieu géométrique du point de contact de la sphère Σ avec le plan donné.

2° Le lieu géométrique du centre de la sphère Σ.

(B). — On donne deux sphères de centres C, C′ et un cône de révolution de sommet O, dont l'axe est perpendiculaire au plan COC′; le triangle COC′ est rectangle en O. — On demande 1° de former les équations du lieu des centres des sphères tangentes au cône et aux deux sphères données ; 2° de discuter la nature de ce lieu dans le cas où le triangle rectangle COC′ devient isocèle, où les sphères données sont égales et où, de plus, la sphère variable touche les sphères données toutes deux extérieurement, ou toutes deux intérieurement.

(*Concours de l'École Polytechnique*, 29 mai 1893.)

Note sur l'exercice 67 (*).

Prenons la conique Γ rapportée à ses axes ordinaires, en coordonnées polaires, et cherchons l'équation qui fait connaître FA, FB. Soient ρ_0, ω_0 les coordonnées de M; ρ_1, ω_1 celles de A.

(*) Une erreur d'impression s'est glissée dans l'énoncé. Il faut FM au lieu de FC.

L'équation de la tangente AM étant

$$\frac{p}{\rho} = \cos(\omega - \omega_1) - e\cos\omega,$$

on a

(1) $$\frac{p}{\rho_0} = \cos(\omega_0 - \omega_1) - e\cos\omega_0.$$

D'ailleurs

(2) $$\frac{p}{\rho_1} = 1 - e\cos\omega_1.$$

Entre (1), (2) éliminons ω_1; en posant $u = 1 - \frac{p}{\rho_1}$, on trouve

$$\frac{u^2}{e^2} - 2\frac{u}{e}\cos\omega_0\left(\frac{p}{\rho_0} + e\cos\omega_0\right) + \left(\frac{p}{\rho_0} + e\cos\omega_0\right)^2 - \sin^2\omega_0 = 0.$$

Or, l'on veut avoir

$$\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{2k}{FM},$$

c'est-à-dire $$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2k}{\rho_0}.$$

On a donc $$2 - u' - u'' = \frac{2k}{\rho_0},$$

ou enfin $$2 - 2e\cos\omega_0\left(\frac{p}{\rho_0} + e\cos\omega_0\right) = \frac{2k}{\rho_0}.$$

Simplifiant, on voit que le lieu demandé correspond à l'équation

(1) $$\frac{p}{\rho} = \frac{1 - e^2\cos^2\omega}{k + e\cos\omega}, \text{ etc...}$$

Remarque. — Un cas particulier remarquable est celui où l'on suppose $k = 1$. Dans cette hypothèse, la conique proposée fait évidemment partie du lieu. L'équation (1) se décompose en effet. On trouve la conique donnée, comme facteur singulier; et, pour le lieu véritable, deux droites correspondant à l'équation

$$\cos\omega = \frac{1}{e}.$$

Ces droites seront réelles dans le cas de l'hyperbole; ce sont les parallèles aux asymptotes, menées par le foyer. Il en résulte un théorème que l'on peut énoncer dans les termes suivants:

Soit Δ *une corde focale parallèle à l'une des asymptotes d'une hyperbole* H. *Si, par un point* M, *pris sur* Δ, *on mène à* H *les tangentes* MA, MB, *on a* (F désignant le foyer situé sur Δ) :

$$\frac{2}{FM} = \frac{1}{FA} + \frac{1}{FB},$$

ERRATUM. — P. 117, l. 9. Au lieu de *triangulaires et carrés*, lisez *triangulaires et doubles d'un triangulaire.*

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 11878-5-93.

SUR UN THÉORÈME DE JAMES GREGORY

Par M. A. Aubry.

(*Suite*, voir page 130.)

9. — Soit à trouver l'*involuta* de la spirale $\rho^m = \omega$. On a, successivement,

$$m\rho^{m-1}d\rho = d\omega = \frac{dx}{\rho},$$

$$my^m dy = dx,$$

$$my^{m+1} = (m+1)x. \tag{6}$$

Ainsi *les spirales des divers ordres ont pour* involutæ *les paraboles des divers ordres.*

Par exemple *l'*involuta *de la spirale d'Archimède est la parabole apollonienne, celles des spirales* $\rho^2 = \omega$ *(spirale de Fermat)*, $\rho = \omega^2$, $\rho^2\omega = 1$ *(lituus *)* $\rho^3\omega = 1$, *ont respectivement pour* involutæ *les deux paraboles cubiques* $2y^3 = 3x$, $y^3 = 9X^2$, *l'hyperbole* $xy = 2$ *et l'hyperbole cubique* $2xy^2 = 3$.

Grégoire de Saint-Vincent a trouvé, le premier, que les arcs de la spirale d'Archimède sont égaux à ceux d'une certaine parabole; cependant c'est dans la *Geometria indivisibilis* de Cavalieri (1635) que l'on voit d'abord cette proposition, d'un genre tout nouveau à cette époque. Le cas général, entrevu par Wallis, a d'abord été énoncé par Sluze (*Mesolabum,... cum parte altera de analysi*, Liège, 1668).

Parmi les remarques qui se déduisent du théorème que nous venons d'obtenir (**), nous mentionnerons seulement la suivante :

(*) Cette courbe est l'inverse de la spirale de Fermat. On peut encore la définir : le lieu des points M tels que le secteur circulaire qui a OM pour rayon et MOX pour angle au centre ait une surface constante ; ou encore le lieu des extrémités des arcs de spirales d'Archimède tels que les secteurs formés par la courbe, le rayon vecteur et l'axe polaire, soient constants. La considération de cette courbe et son nom sont dus à Cotes (*Harmonia mensurarum*, 1722.)

(**) On peut rechercher, par exemple, quelle est l'antipodaire de la spirale d'Archimède et quelle est l'anticycloïdale de la parabole : dans les deux cas on trouve la développante de cercle.

m *étant entier, la spirale* $\rho = \omega^m$ *se rectifie absolument, ou par les logarithmes, selon que* m *est pair ou impair*. Par exemple la spirale $\rho = \omega^2$ est rectifiable, puisque ses arcs sont égaux à ceux de la parabole $y^2 = 9x^2$; d'ailleurs le calcul direct

donne $$(s)_0^\rho = \frac{1}{2}\int_0^\rho \sqrt{4+\rho}.d\rho = \frac{1}{3}\sqrt{(4+\rho)^3},$$

Cette spirale se construit ainsi : on rabat sur l'axe polaire un rayon vecteur ON de la spirale d'Archimède, au moyen de l'arc de cercle NK et on porte, sur ON, la longueur OM égale à l'arc NK; le lieu des points M est la courbe cherchée. On peut encore la définir comme le lieu des extrémités des sous-tangentes de la spirale d'Archimède.

10. — Pour $m = -1$, la formule (6) est en défaut : comme on a dans ce cas $$\rho\omega = 1,$$
il s'ensuit
$$\rho d\omega + \omega d\rho = 0, \qquad \text{d'où} \qquad dx + \frac{d\rho}{\rho} = 0;$$
et par suite $$x + l\rho = 0,$$
ou, puisque $\rho = y$, $$x + ly = 0.$$

Ainsi *l'involuta d'une spirale hyperbolique est une logarithmique*. Ce théorème est dû à Nicolas (*De spiralibus hyperbolicis et lineis logarithmicis*, Toulouse, 1696). (Voir la note III (*).)

On verra de même que l'*involuta* de la spirale logarithmique $\rho = e^{m\omega}$ est représentée par la droite $x = my$. Ce résultat conduira facilement à la connaissance des nombreuses propriétés de cette courbe. (*Cf. N.A.M.* 1856, p. 102, E. Catalan.) *(A suivre.)*

NOTE SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS
DE LA PARABOLE ET DE SA DÉVELOPPÉE
OBTENUES EN CONSIDÉRANT CES COURBES COMME UNICURSALES

Par M. E.-N. **Barisien**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir page 135.)

5. — Désignons maintenant par D la longueur MN de la corde interceptée par la parabole sur la normale, par D′ la longueur CC′ de la corde interceptée sur cette même normale par la développée, et par R le rayon de courbure MC.

(*) Les notes qui accompagnent cet article seront publiées dans le prochain numéro.

On trouve, sans difficulté :

(3) $$R = p(1 + m^2)^{\frac{3}{2}},$$

(4) $$D = \frac{2p}{m^2}(1 + m^2)^{\frac{3}{2}},$$

(5) $$D' = \frac{9pm^2}{8}(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite

(6) $$DD' = \frac{9p^2}{4}(1 + m^2)^2$$

En éliminant $(1 + m^2)$ entre (3) et (6), on obtient la relation

$$R^4p^2 = \left(\frac{4DD'}{9}\right)^3.$$

6. — *Coefficient angulaire* μ *de la droite* MM'. On trouve

$$\mu = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{4}{m}.$$

L'équation de la droite MM' est donc

$$y + pm = -\frac{4}{m}\left(x - \frac{pm^2}{2}\right)$$

ou

(7) $$my + 4x - pm^2 = 0.$$

On voit immédiatement que cette droite enveloppe la parabole représentée par

(8) $$y^2 + 16px = 0.$$

Donc *dans la parabole, les cordes qui joignent le pied d'une normale double, au pied d'une normale simple issue du même point, enveloppent une parabole.*

Le lieu des milieux de ces cordes est aussi une parabole.

Pour obtenir les coordonnées du point de contact de la droite (7) avec son enveloppe (8), il faut identifier l'équation (7) avec celle d'une tangente à la parabole (8), au point (h, k). On a, pour cette dernière équation,

(9) $$yk + 8p(x + h) = 0.$$

Identifiant (8) et (9), il vient

$$\frac{k}{m} = 2p = -\frac{8h}{m^2};$$

d'où $$h = -\frac{pm^2}{4} = -\frac{x_1}{2},$$

$$k = 2pm = -2y_1.$$

Si donc, on prend, sur l'axe des x négatifs, une longueur $OQ = \frac{OP}{2}$, et si l'on élève une ordonnée négative $QT = 2MP$, le point T ainsi obtenu est le point où la droite MM' touche la parabole (8).

On peut remarquer, aussi, que la droite MM' passe par le milieu de OP.

7. — *Coefficient angulaire* ν *de la droite* NN'. On a

$$\nu = \frac{y'_1 - y'}{x'_1 - x'} = \frac{4m}{m^2 - 4}.$$

8. — *Coefficient angulaire* λ *de la droite* CC''. On trouve

$$\lambda = \frac{Y - \eta_1}{X - \xi_1} = \frac{7m}{10}.$$

L'équation de la droite CC'' est, par suite,

$$y - pm^3 = \frac{7m}{10}\left(x - p - \frac{3pm^2}{2}\right),$$

ou

$$y = (x - p)\frac{7m}{10} - \frac{pm^3}{20}.$$

D'après cette équation, l'enveloppe de la droite correspondante est la développée d'une certaine parabole ayant pour demi-paramètre $P = \frac{8a}{27}$.

De cette manière, on trouve que, *si le point* M *se déplace sur la parabole, le centre de gravité du triangle* CC'C'', *et les milieux des côtés de ce triangle décrivent, chacun, une développée de parabole.*

9. — Voici d'autres coefficients angulaires :

Coefficient angulaire de OM. Il est égal à $\frac{y_1}{x_1}$, c'est-à-dire égal à $-\frac{2}{m}$.

Coefficient angulaire de la tangente en M'. Il est égal à $\frac{2}{m}$.

Il en résulte que le cercle circonscrit au triangle OMM est tangent, en M', à la parabole.

On a encore

Coefficient angulaire de OM'. Ce coefficient est égal à $\frac{y_2}{x_2}$, c'est-à-dire égal à $\frac{4}{m}$.

Donc, OM′ et MM′ sont également inclinés sur l'axe.

De ce que

$$\textit{Coefficient angulaire de } M''C'' = \frac{m}{4} \text{ (*)}.$$

Il en résulte que M″C″ est perpendiculaire à MM′, propriété qui peut s'énoncer ainsi :

Si l'on considère la corde d'une parabole, unissant le pied d'une normale double au pied d'une normale simple, issue du même point; la normale double coupe de nouveau la développée de la parabole en un certain point; la tangente à la développée, en ce point, est perpendiculaire à la corde.

On trouve encore que :

$$\textit{Coefficient angulaire de } SC : \quad \frac{Y}{X - p} = \frac{2m}{3}$$

$$\textit{Coefficient angulaire de } SC' : \quad \frac{\eta}{\xi - p} = -\frac{m}{3}.$$

10. — *Lieu du point* I *d'intersection des normales en* M *et* M″.

Ces deux normales ayant pour équations

$$y = m(x - p) - \frac{pm^3}{2},$$

$$y = \frac{m}{4}(x - p) - \frac{pm^3}{128},$$

l'élimination de m, entre ces deux équations, montre que le lieu du point I est une développée de parabole.

De ce point I, outre les normales ayant leurs pieds en M et M″, on peut mener une troisième normale à la parabole. Si M est le coefficient angulaire de cette troisième normale, on a, en exprimant que la somme des coefficients des trois normales est nulle,

$$M + m + \frac{m}{4} = 0.$$

Donc
$$M = -\frac{5m}{4}.$$

Si l'on demandait les coordonnées des points analogues à M, N, C et C′, correspondant à cette normale, il faudrait, dans les formules du commencement de cet article, changer m en $-\frac{5m}{4}$.

(*) M″ est le point de la parabole ayant son centre de courbure en C″

11. — *Relations d'aires.* — On trouve :

$$\text{Aire du triangle curviligne OPM} = \frac{p^2m^3}{3}.$$

$$\text{Aire du triangle curviligne SCD} = \frac{3p^2m^5}{5}.$$

$$\text{Aire OP'M'} = \frac{1}{8}(\text{Aire OPM}),$$

$$\text{Aire SC'D'} = \frac{1}{32}(\text{Aire SCD}).$$

On trouve aussi :

$$2\,(\text{Aire MM'M''}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{pm^2}{2} & -pm & 1 \\ \dfrac{pm^2}{8} & \dfrac{pm}{2} & 1 \\ \dfrac{pm^2}{32} & -\dfrac{pm}{4} & 1 \end{vmatrix} = kp^2m^3,$$

k étant un facteur numérique.

De même

$$\begin{matrix}2\ \text{Aire} \\ (\text{triangle CC'C''})\end{matrix} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \xi & \eta & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p + \dfrac{3pm^2}{2} & pm^3 & 1 \\ p + \dfrac{3pm^2}{8} & -\dfrac{pm^3}{8} & 1 \\ p + \dfrac{3pm^2}{32} & \dfrac{pm^3}{64} & 1 \end{vmatrix} = p^2m^5k',$$

k' étant encore un facteur numérique.

En résumé, on a les deux relations :

$$\frac{\text{Aire OMP}}{\text{Aire MM'M''}} = \text{constante}, \qquad \frac{\text{Aire SCD}}{\text{Aire CC'C''}} = \text{constante}.$$

(A suivre.)

NOTE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
SUR LES SECTIONS PLANES DES SURFACES
DU SECOND DEGRÉ

Par **Aug. Morel**, professeur à l'École Lavoisier

1. — Dans la présente Note, nous nous proposons de déterminer graphiquement certains éléments de la section plane d'une surface du second degré quelconque ; nous supposerons, comme cela se présente le plus ordinairement dans

les épures, que les plans de projection sont parallèles à deux des plans principaux de la surface qui aura, dès lors, un axe parallèle à la ligne de terre, un second axe vertical, et le troisième perpendiculaire au plan vertical; mais, en réalité, dans les constructions que nous devrons employer pour traiter la question d'une manière absolument générale, nous n'aurons besoin de connaître que le plan diamétral parallèle au plan horizontal, et le diamètre conjugué de ce plan diamétral. On peut alors déterminer les tangentes principales de la section, ainsi que les axes de la projection horizontale de cette section, lorsqu'elle est elliptique.

2. — Pour déterminer les tangentes de la section parallèles à une direction donnée du plan sécant, nous observons que ce sont les droites de rencontre du plan et du cylindre circonscrit à la surface, ayant ses génératrices parallèles à la droite donnée. Or, la ligne de contact de ce cylindre est une courbe plane dont le plan passe par le centre de la surface, ou bien, dans le cas du paraboloïde, est parallèle aux diamètres de la surface; il suffira donc, dans l'un et dans l'autre cas, de connaître deux points de ce plan, non en ligne droite avec le centre, ou bien qui ne soient pas tous les deux sur une droite parallèle aux diamètres du paraboloïde. On obtient ces deux points avec facilité, en considérant un quelconque des plans auxiliaires qui servent à déterminer un point courant, par exemple un plan horizontal : il détermine, dans la surface, une section homothétique à la courbe diamétrale horizontale, ayant son centre sur le diamètre conjugué; et, si l'on mène tous les plans tangents aux divers points de cette section, tous ces plans tangents rencontrent, en un même point, le diamètre conjugué; ils enveloppent un cône. Si à ce cône on mène des plans tangents parallèles à la direction donnée, ces plans touchent la surface en des points de la courbe précédente, et qui appartiennent au plan de la courbe de contact. (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Soient A et B les points ainsi obtenus; prenons l'intersection du plan donné P et du plan déterminé par les points

A, B, O ; nous obtenons une droite D dont nous chercherons, par la méthode ordinaire, l'intersection avec la surface du second degré. Nous aurons deux points M et N ; ces points appartiennent à la section ; et, en ces points, les tangentes sont parallèles à la droite donnée.

3. — Dans la disposition particulière que nous avons supposée au début, nous pourrons, plus rapidement, prendre les plans perpendiculaires au plan vertical qui déterminent des sections se projetant horizontalement suivant des cercles ; nous trouverons ensuite le sommet du cône circonscrit le long des sections, et nous continuerons la construction comme précédemment.

4. — Parmi les tangentes importantes à déterminer, se trouvent les tangentes horizontales. Le plan tangent à chacune des extrémités du diamètre IJ, conjugué de la section horizontale, est lui-même horizontal ; tous les plans qui passent par ce diamètre IJ contiennent les courbes de contact des tangentes horizontales ; par suite, le plan de la courbe de contact passe, dans ce cas, par le diamètre IJ ; il coupe le plan diamétral horizontal suivant un autre diamètre RS, conjugué de la trace $\alpha\beta$ du plan P sur le plan diamétral horizontal ; et, en outre, les diamètres IJ et RS sont deux diamètres conjugués de la courbe ; ils se projettent donc verticalement suivant deux diamètres conjugués, dont l'un est parallèle à la ligne de terre. Le plan sécant et le plan de la courbe se coupent suivant une droite $\varepsilon\xi$, dont on peut facilement trouver l'intersection avec une conique dont on connaît deux diamètres conjugués.

Lorsque le plan horizontal est parallèle à l'un des plans principaux, on a immédiatement les axes de l'ellipse, projection verticale de la courbe de contact. On peut aussi déterminer, d'un façon analogue, les tangentes de front et les tangentes de profil s'obtiendront en projetant simplement les axes sur un plan de profil, pris comme nouveau plan vertical, et cherchant les tangentes de front relatives à ce nouveau plan vertical.

5. — La détermination de la courbe de contact des tan-

gentes horizontales, parallèles au plan de section, va nous permettre de construire les axes de la projection horizontale de la section. Pour cela, rappelons que les intersections de la surface par deux plans parallèles sont deux courbes homothétiques, se projetant suivant deux courbes homothétiques.

Cela posé, menons le plan diamétral parallèle au plan sécant; il coupe le plan diamétral horizontal suivant un diamètre $\lambda\mu$, parallèle à la trace horizontale $\alpha\beta$ du plan P; de plus, il coupe le plan de la courbe de contact des tangentes parallèles à $\alpha\beta$, suivant un autre diamètre HK conjugué de $\lambda\mu$ dans le plan diamétral parallèle à P. Nous avons dit tout à l'heure que le plan diamétral horizontal coupait le plan de la courbe de contact suivant le diamètre RS conjugué de $\alpha\beta$, conjugué de $\lambda\mu$ par conséquent. Alors le plan des deux diamètres RS et HK est conjugué de $\lambda\mu$, et parallèle aux plans tangents à la surface aux points tangents λ et μ.

Traçons la droite RH, dans le plan des deux diamètres, et considérons le cylindre ayant pour directrice la courbe diamétrale horizontale de la surface, et les génératrices parallèles à RH; ce cylindre coupe la surface suivant une seconde courbe plane qui n'est autre chose que la conique dont $\lambda\mu$ et HK sont deux diamètres conjugués.

Nous sommes donc ramené à chercher les axes de la projection horizontale de cette section plane du cylindre (*), et pour cela nous prendrons, pour plus de commodité, la trace horizontale du cylindre, trace dont nous avons immédiatement deux diamètres conjugués. Ce sont les diamètres parallèles à RS et $\lambda\mu$.

Nous avions précédemment déterminé le diamètre de la courbe de section par le plan P, parallèle à HK; les deux courbes étant homothétiques, nous avons donc construit facilement le centre d'homothétie; nous avons, en grandeur et direction, les axes de la projection horizontale de la courbe $\lambda\mu$HK; ainsi nous obtenons immédiatement les axes de la projection horizontale de la courbe de section par le plan P.

(*) Voir, pour cette question, *J. M. S.*, page 60.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite*, voir p. 68.)

266. — *Soit un triangle* ABC, *un point* M (x_1, y_1, z_1). AM, BM, CM *rencontrent en* A_1, B_1, C_1 *la circonférence circonscrite. Former l'équation de la conique inscrite à la fois aux triangles* ABC, $A_1B_1C_1$.

On trouve aisément pour les coordonnées de A_1, et l'équation de B_1C_1 :

$$\frac{x}{-\dfrac{ay_1z_1}{bz_1+cy_1}} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$$

$$-axy_1z_1 + yx_1(cx_1 + az_1) + zx_1(ay_1 + bx_1) = 0$$

Pour B_1, C_1, A_1B_1, A_1C_1, on aurait des formules analogues. Soit

$$\sqrt{Ax} + \sqrt{By} + \sqrt{Cz} = 0$$

l'équation cherchée de la conique.

Son équation tangentielle est

$$(1) \qquad Amn + Bln + Cml = 0,$$

$lx + my + nz = 0$ étant une tangente.

Si l'on écrit que deux des côtés du triangle $A_1B_1C_1$ satisfont à la relation (1), on a deux équations qui déterminent A, B, C. On trouve

$$\frac{Ax_1}{a(bz_1+cy_1)} = \frac{By_1}{b(az_1+cx_1)} = \frac{Cz_1}{c(ay_1+bx_1)}.$$

On constate aisément que la conique déterminée par ces valeurs de A, B, C est tangente au troisième côté de $A_1B_1C_1$.

Applications :

1° *Si* M *est le point de Lemoine de* ABC, *la conique inscrite aux triangles* ABC, $A_1B_1C_1$ *est représentée par* $\Sigma\sqrt{\dfrac{x}{a}} = 0$.

C'est l'ellipse de Brocard, de foyers Ω, Ω'.

On peut généraliser la question en substituant au cercle circonscrit une conique circonscrite quelconque :

$$(2) \qquad \lambda yz + \mu xz + \nu xy = 0.$$

On trouve de la même manière

$$(3) \qquad \frac{Ax_1}{\lambda(\mu z_1+\nu y_1)} = \frac{By_1}{\mu(\lambda z_1+\nu x_1)} = \frac{Cz_1}{\nu(\lambda y_1+\mu x_1)}.$$

2° *Une conique circonscrite, dont le point de Lemoine est* M, *est rencontrée en* A_1, B_1, C_1 *par les droites* AM, BM, CM. *La conique inscrite au triangle de référence et au triangle* $A_1B_1C_1$ *a pour point de Gergonne le point* M.

J'appelle point de Lemoine de la conique (2), le point

$$x : y : z = \lambda : \mu : \nu.$$

267. — *Deux triangles homologiques étant circonscrits à une*

même conique, former l'équation de la conique à laquelle ils sont inscrits.

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées normales du centre d'homologie par rapport à un des triangles pris comme triangle de référence, et conservons les notations de l'exercice précédent. Il suffit de résoudre, par rapport à λ, μ, ν, les équations (3); on trouve :

$$\frac{\lambda}{x_1}(By_1 + Cz_1 - Ax_1) = \frac{\mu}{y_1}(Ax_1 - By_1 + Cz_1)$$
$$= \frac{\nu}{z_1}(Ax_1 + By_1 - Cz_1).$$

BIBLIOGRAPHIE

Essai d'une introduction à la théorie des quantités complexes représentées géométriquement, par B. Carrara. (Cremona, lit. Fezzi, 1893; prix 2 fr. 50 c.)

Dans cet ouvrage (150 pages, environ), M. Carrara a remarquablement et clairement résumé les travaux, très nombreux et très importants, dans lesquels les mathématiciens, depuis Argand, Français et Mourey, ont établi, d'après la représentation géométrique, la théorie des quantités complexes. L'historique de ces travaux se trouve exposé, avec beaucoup de soin, dans une longue et intéressante préface; nous y renvoyons le lecteur.

Le livre de M. Carrara se divise en deux parties. Dans la première, il indique d'abord les principes de la représentation géométrique de l'expression $a + bi$; puis il montre comment, en utilisant cette représentation, on peut effectuer les opérations élémentaires sur les quantités complexes. Cette expression ne diffère pas sensiblement, à ce qu'il nous a semblé, de celle qui est aujourd'hui classique et que l'on trouve dans les ouvrages français qui traitent de cette matière; mais elle est donnée avec beaucoup d'ordre et une parfaite netteté.

La seconde partie renferme des applications diverses sur *les séries*, *les fonctions des variables géométriques*, *les équations algébriques* (th. de d'Alembert) et *les intégrales des fonctions de variables complexes prises entre des limites imaginaires.*

Cet ouvrage de M. Carrara est écrit en italien, mais la lecture en est facile et il constitue, pensons-nous, une excellente introduction à un cours d'Analyse supérieure.

L. Grillières. — **Étude des modifications apportées par la rotation diurne de la terre aux lois de l'équilibre et du mouvement des corps pesants.** In-8°, 31 p. Paris, librairie Nony et Cie, 1893.

Le titre de la brochure de M. le colonel Grillières indique assez nettement le but qu'a poursuivi l'auteur. Son étude se divise en trois parties : Direction de la verticale; Diminution de l'effet de l'attraction terrestre sur les corps pesants; Déviations produites pendant la chute des corps.

Les deux premières sont classiques, et on les trouve en quelque sorte ici comme introduction à la troisième, de beaucoup la plus étendue, et où l'on trouve le côté original de cet intéressant mémoire. Les résultats sont obtenus par la considération des mouvements absolus, et concordent, naturellement, avec ceux que donne la théorie, généralement employée, des mouvements relatifs. Enfin, l'auteur a la très heureuse idée d'*isoler*, en quelque sorte, l'influence individuelle de chacune des trois forces considérées : attraction terrestre, force centifuge, force centrifuge composée, et de montrer séparément l'action de chacune d'elles.

Tous ceux qui prennent goût à ces questions si intéressantes de Mécanique terrestre liront avec plaisir le travail de M. le colonel Grillières, dans lequel les considérations analytiques et géométriques sont tour à tour utilisées avec beaucoup d'habileté et de discernement. C. A. L.

La risoluzione dei problemi numerici e geometrici, par le D[r] RODOLFO BETTAZZI, professeur au lycée Cavour et à l'École militaire (Ditta, G. B. Paravia et C[ie], éditeurs, Turin, et... Prix 2 francs).

Comme le rappelle M. Bettazzi dans la préface de cet ouvrage, de nombreux efforts ont été faits pour présenter, dans une forme facilement assimilable, les méthodes qui doivent être suivies pour résoudre les problèmes d'arithmétique et ceux de la géométrie. En France, on trouve l'exposition de ces méthodes dans divers ouvrages et notamment dans la géométrie de MM. Rouché et de Comberousse et dans le livre de M. P. Serret : *Des méthodes en géométrie.* L'ouvrage de M. Bettazzi, est plus élémentaire que les ouvrages que nous venons de citer. Mais il renferme plusieurs développements qui intéresseront certainement les professeurs chargés d'initier les élèves aux premiers principes des mathématiques. Nous citerons *l'homogénéité des formules, la construction des expressions homogènes, l'évaluation du nombre des conditions qui correspondent à une donnée géométrique*, etc.

Sur la Géométrie non Euclidienne, par M. L. GÉRARD, professeur au lycée de Brest (Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris).

Tout le monde sait aujourd'hui ce qu'il faut entendre par la Géométrie non Euclidienne, la *Géométrie imaginaire,* comme on l'a, autrefois, appelée ! Bien que Gauss ait conçu, le premier, la base de cette Géométrie, c'est Lobatcheffsky (*) qui, par un article intitulé *Nouveaux Principes*

(*) Nicolas Ivanovitch Lobatcheffsky, né le 22 octobre 1793, est mort le 14 février 1856. L'Université de Kasan, à laquelle Lobatcheffsky fut successivement attaché comme élève, comme professeur, et, enfin, comme recteur, se prépare à fêter le centenaire de ce savant. En refusant le postulatum d'Euclide, ce postulatum qui, comme l'a dit d'Alembert, fait depuis tant de siècles le scandale de la géométrie et le désespoir des géomètres, il a incontestablement ouvert à la science mathématique des horizons curieux. Pourtant, l'idée de Lobatcheffsky n'a pas produit, jusqu'ici, des résultats marquants. Peut-être l'avenir lui sera-t-il plus favorable, bien qu'il soit difficile de saisir comment la géométrie non Euclidienne pourrait faire servir ses résultats à la découverte de faits nouveaux, intéressant la géométrie Euclidienne. Sans doute, la géométrie non Euclidienne ne différant de la géométrie sphérique que par le changement de R en $R\sqrt{-1}$ on pourrait déduire, d'un chapitre quel-

de Géométrie publié en 1829 dans les MÉMOIRES DE L'UNIVERSITÉ DE KASAN, est considéré comme le fondateur de cette géométrie. Ses principes sont exposés dans la note II de la *Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse (*).

On peut, je crois, résumer d'un mot la thèse de M. Gérard en disant qu'elle constitue la base d'une étude analytique de la géométrie non Euclidienne. C'est au moyen des *fonctions hyperboliques*, et en s'appuyant sur les formules qui relient entre elles ces fonctions, que l'on établit cette base de la géométrie non Euclidienne. On voit par là que cette étude ne peut pas être faite par la seule considération des principes de la géométrie élémentaire, antérieure au postulatum, et l'on doit, comme l'observent avec raison MM. Rouché et de Comberousse (*loc. cit.*, p. 583), pour éviter toute pétition de principe, montrer qu'on peut établir la théorie des fonctions circulaires et celle des fonctions hyperboliques sans utiliser les considérations géométriques. On doit alors définir les lignes trigonométriques par des fonctions analytiques en posant

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \cdots$$

Quant aux autres lignes trigonométriques, on les rattache à celles-ci en disant que, par définition,

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \text{etc...}$$

La thèse de M. Gérard, à laquelle je reviens, est un travail très consciencieux et fort bien rédigé. Il se divise en trois chapitres.

Le premier traite de la trigonométrie. L'auteur, en prenant la base analytique que nous venons de rappeler, établit les formules fondamentales: relations entre les éléments d'un triangle, formules d'addition, etc.

Dans le deuxième chapitre, M. Gérard recherche les constructions que l'on peut faire en géométrie non Euclidienne avec la règle et le compas. A cet effet, suivant en cela une voie naturelle, il recherche d'abord, dans un système de coordonnées qu'il nomme *Coordonnées normales*, les

---

conque de géométrie non Euclidienne, des faits correspondants concernant la géométrie sphérique; et, en fait, le premier chapitre de la thèse de M. Gérard est rédigé de telle façon qu'avec de légères modifications on en déduirait une démonstration des formules de cette géométrie. Cette démonstration présenterait l'avantage d'être *directe*. Pour les amis de la géométrie non Euclidienne c'est là un avantage appréciable. Mais comment, au début des études mathématiques, devant des auditeurs initiés simplement aux premières notions de l'arithmétique, exposer la géométrie, sans prendre pour base de la théorie des parallèles le postulatum d'Euclide? Le principal mérite de Lobatcheffsky et de ses continuateurs, Bolyai, Riemann, Helmoltz, Battaglini, Beltrami, Klein, Cassani, de Tilly, Flye Sainte-Marie, etc., est d'avoir montré l'impossibilité où nous sommes de démontrer un postulatum qu'il faut accepter, résolument, comme une vérité résultant de l'observation expérimentale.

(*) Nous renvoyons aussi le lecteur désireux de se mettre au courant de la géométrie non Euclidienne à un article de M. Gérard, publié dans le n° de février des *Nouvelles Annales*, p. 74.

formules principales ; *distance de deux points*, *angle de deux droites*, etc... Après avoir établi les formules en raisonnant sur les *éléments géométriques*, au sens ordinaire du mot, on prend les résultats obtenus pour définir les grandeurs de la géométrie non Euclidienne et l'on arrive ainsi, pour citer un théorème de cette géométrie, à la proposition suivante due, d'après une note que j'emprunte à la thèse de M. Gérard, à un prédécesseur de Lobatscehfisky : « *Deux droites étant données, ou bien elles se coupent, ou bien elles ont une perpendiculaire commune, ou bien elles se rapprochent indéfiniment sans jamais se rencontrer.* » Je cite cette proposition parce que, au fond, elle résume la doctrine non Euclidienne qui, avec le point de départ qu'elle prend pour base, aboutit, dans le plan. à la notion de droites *asymptotes l'une à l'autre.*

Un troisième chapitre, très court, traite de la mesure des aires.

Je n'ai jamais été, je l'ai dit à M. Gérard en lui accusant réception de sa thèse, partisan de la géométrie non Euclidienne, parce que je ne crois pas utile de perdre de vue, dans les spéculations mathématiques, le champ réel. Si l'on consent à l'abandonner à un instant donné, et l'on est parfois contraint de le faire, ce doit toujours être avec l'arrière-pensée de revenir aux applications; aussi, l'excursion faite dans le champ idéal doit, pour être vraiment digne de notre attention, servir tôt ou tard à des faits positifs, susceptibles d'être utilisés dans la géométrie Euclidienne et dans toutes les sciences qui s'y rattachent, la mécanique, l'astronomie, etc. Toute autre chose ne me paraît être qu'un jeu d'esprit qui, malheureusement, pour intéressant qu'il soit, nous prend un temps et des forces que nous pourrions peut-être mieux employer; or, Franklin l'a dit avec raison : « Ne gaspillez pas le temps, car c'est l'étoffe dont la vie est faite. »

Si la lecture de la thèse que j'ai trop rapidement, à mon grand regret, analysée ici, n'a pas modifié ma manière de voir sur la géométrie non Euclidienne, je puis dire pourtant à ceux qui désireraient s'initier à cette géomérie qu'ils ne pourront trouver un guide meilleur, plus complet, plus clair, que le travail, excellent dans son genre, de M. Gérard.

(G. L.)

ÉCOLE NORMALE

(CONCOURS DU 12 JUIN 1893)

1° Les coordonnées des points d'une courbe (C) étant représentées par les formules

$$x = \frac{2}{t-a}, \qquad y = \frac{2}{t-b}, \qquad z = \frac{2}{t-c},$$

où t désigne un paramètre variable et a, b, c sont trois constantes *différentes*, on considère tous les segments de droite dont les deux extrémités sont sur la courbe (C) et on demande de trouver la surface (S) lieu des milieux M de ces cordes.

2° Démontrer que la surface (S) contient la courbe (C) et ses trois asymptotes,

Montrer qu'à chaque point M de cette surface correspond une seule corde de la courbe (C) ayant son milieu en M. Discuter analytiquement et mettre ainsi en évidence trois droites tracées sur la surface (S).

4° Délimiter la région du plan des xy où doit se projeter un point M de la surface (S) pour que la corde dont ce point est le milieu joigne deux points réels de la courbe (C).

5° Trouver toutes les droites situées à distance finie sur la surface (S).

6° Trouver le lieu des cordes de la courbe (C) dont les milieux sont sur une droite.

EXERCICE ÉCRIT

69. — On considère deux axes rectangulaires Ox, Oy. Deux paraboles P, P′ touchent ces droites, respectivement, aux points A, B; A′, B′.

On peut mener aux paraboles P, P′ une tangente commune MM′ et l'on suppose MM′ parallèle à la première ou à la seconde bissectrice de yOx.

1° Démontrer que, dans cette hypothèse, le foyer de P est situé sur OM et que le foyer de P′ est sur OM′.

2° En supposant que P soit fixe, trouver le lieu du foyer de P′.

Notes sur l'exercice 68 (*).

(Solution de la question posée aux examens écrits de l'École Polytechique en 1893).

I. — Prenons le plan donné; pour plan xoy; pour axe ox, la ligne des centres des sphères S, S′; pour origine, le milieu de cette ligne; pour axe oy, une perpendiculaire à cette droite; pour axe oz, enfin, une normale au plan.

En désignant par $2a$ la longueur de la ligne des centres, les sphères données ont, respectivement, pour équation

(S) $$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

(S′) $$(x + a)^2 + y^2 + z^2 = R'^2.$$

Soient α, β, les coordonnées du point M où Σ touche le plan yox; λ désignant le rayon de Σ, l'équation de cette sphère est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 - 2\lambda z = 0. \qquad (\Sigma)$$

En écrivant que Σ touche les sphères S, S′, on a

$$(a - \alpha)^2 + \beta^2 + \lambda^2 = (R \pm \lambda)^2,$$
$$(a + \alpha)^2 + \beta^2 + \lambda^2 = (R' \pm \lambda)^2.$$

(*) Voyez l'énoncé p. 143.

En prenant le signe $+$, en considérant dans le réseau Σ, par conséquent, les sphères qui touchent les sphères données extérieurement, on a

$$(1)\qquad (a-\alpha)^2+\beta^2=R^2+2R\lambda,$$
$$(2)\qquad (a+\alpha)^2+\beta^2=R'^2+2R'\lambda.$$

1° Le lieu de M, dans l'hypothèse que nous avons faite, s'obtient en éliminant λ entre (1), (2). Ce lieu correspond dans à l'équation

$$(3)\qquad x^2+y^2-2ax\frac{R'+R}{R'+R}+a^2+RR'=0.$$

Cette équation représente une circonférence.

En cherchant successivement l'axe radical de (3) avec les circonférences γ, γ' obtenues en coupant les sphères S, S' par le plan yox, on obtient la même droite. Ainsi, la circonférence trouvée passe par les points A, A' communs à ces deux circonférences. Ces points se prévoient d'ailleurs *a priori* en considérant les sphères évanouissantes ayant ces points pour centres; sphères qui, visiblement, font partie du réseau considéré.

On peut encore observer que le centre de (3) est un point situé sur ox, à une distance $a\dfrac{R'-R}{R'+R}$ de l'origine. C'est le centre de similitude externe des deux circonférences λ, λ'. La circonférence (3) se trouve ainsi complètement déterminée.

En considérant les sphères qui touchent *intérieurement* S, S' on trouve le même résultat.

Enfin, les sphères qui touchent : *intérieurement*, l'une des sphères; *extérieurement*, la seconde sphère; donnent une autre circonférence, passant par les points A, A' mais dont le centre coïncide avec le centre de similitude interne des circonférences γ, γ'.

2° Les coordonnées du point M', centre de Σ, sont, dans la notation que nous avons adoptée, α, β, λ. Les équations (1), (2) considérées comme simultanées, représentent le lieu demandé. Ces équations donnent, par soustraction

$$4a\alpha=(R'-R)(R'+R+2\lambda).$$

Le lieu de M' est donc *une ellipse*, intersection du cylindre circulaire droit correspondant à (3) avec un plan parallèle à Oy et dont l'équation est

$$4ax=(R'-R)(R'+R+2z).$$

On obtient une *seconde ellipse* en prenant, dans les équations (1), (2), λ avec le signe —. On est alors placé dans le cas des sphères touchant intérieurement les sphères données.

Enfin, si les sphères Σ touchent : intérieurement, l'une des sphères données, extérieurement l'autre sphère, on obtient deux autres ellipses situées sur le cylindre ayant pour équation

$$x^2+y^2+2ax\frac{R-R'}{R+R'}+a^2-RR'=0.$$

Remarque. — On peut se demander si la circonférence (3) est toujours réelle.

L'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$\left(x-a\frac{R'-R}{R'-R}\right)^2+y^2=\frac{RR'}{(R'-R)^2}(2a+R'-R)(2a+R-R').$$

On voit alors que (3) est imaginaire quand les deux circonférences sont intérieures l'une à l'autre, et seulement dans ce cas.

II (*). — Appelons 2φ l'angle au sommet du cône.

Soit $D(\alpha, \beta, \gamma)$ un point du lieu; le plan zOD coupe yOx suivant Ot et le cône donné suivant deux génératrices; soit OM l'une de ces génératrices. Si, de D, nous abaissons DI, perpendiculaire sur Ot, on a

$$DI = \gamma, \quad OI = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Abaissons DM perpendiculaire sur OM, DM représente le rayon λ d'une sphère, de centre D, tangente au cône. Si nous projetons sur MD le contour brisé MOID, nous avons

(1) $\lambda = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\cos\varphi - \gamma\sin\varphi.$

En posant $OC = a$, $OC' = a'$ on voit que les sphères fixes, considérées, seront tangentes à la sphère Σ, de centre D, de rayon λ, si l'on a

$$\left.\begin{array}{l}(a-\alpha)^2 + b^2 + \gamma^2 = (R \pm \lambda)^2 \\ \alpha^2 + (a' - \beta)^2 + \gamma^2 = (R' \pm \lambda)^2\end{array}\right\} \quad (2)$$

Les équations (1), (2) représentent le lieu cherché, quand on élimine λ.

2° Mais abordons le cas particulier signalé, celui où l'on suppose $a = a'$. $R = R'$. Les équations (2) (dans lesquelles λ est pris avec le même signe, conformément aux conditions imposées par l'énoncé) donnent

$$\alpha = \beta,$$

et
$$\pm\,\alpha\sqrt{2}\cos\varphi = \lambda + \gamma\sin\varphi.$$

En adoptant le signe $+$, on trouve que le lieu correspondant est une conique ayant pour équations

$$y = x, \qquad (a - x)^2 + y^2 + z^2 = (R + x\sqrt{2}\cos\varphi - z\sin\varphi)^2.$$

Pour étudier le genre de cette conique, il suffit de chercher sa projection sur un plan de coordonnées, par exemple sur le plan zox. L'équation de cette projection est

$$(a - x)^2 + x^2 + z^2 = (R + x\sqrt{2}\cos\varphi - \sin\varphi)^2,$$

ou
$$(x\sqrt{2}\sin\varphi + z\cos\varphi)^2 + \ldots\ldots = 0.$$

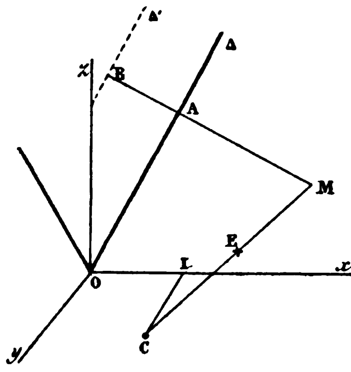
La courbe correspondante est une parabole. En prenant successivement le signe $+$ et le signe, $-$ dans (2) et dans la première des équations (C), on trouve que *le lieu demandé est constitué par l'ensemble de quatre paraboles.*

DÉVELOPPEMENTS GÉOMÉTRIQUES. — La géométrie peut nous indiquer facilement ce résultat, et nous montrer comment sont placées, dans le plan des sections considérées, les paraboles du lieu.

Considérons le plan zoX qui passe par oz et par le milieu de CC'. Puisqu'on suppose $OC = OC'$, $R = R'$, le lieu est une courbe située dans ce plan. Il est facile de trouver une définition géométrique de cette

(*) Les axes, dans cette question, sont les droites OC, OC' et la normale en O, au plan COC'.

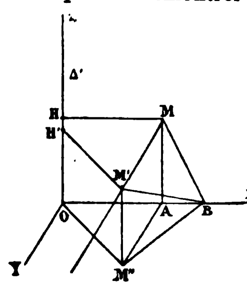
courbe et de tirer, de cette définition, la conclusion que le lieu est un système de paraboles. Nous déterminerons ensuite, pour chacune d'elles, le foyer et la directrice.



Soit M un point du lieu; de M, abaissons une perpendiculaire sur la génératrice OΔ qui se trouve dans le plan zoX et joignons le point M au centre C de la première sphère donnée S. Cette droite MC rencontre S en deux points; soit E l'un d'entre eux. Abaissons MA perpendiculaire sur Δ, et prolongeons cette droite d'une longueur AB = CE = R. Enfin, traçons Δ' parallèle à Δ, menée par B. Comme MA = ME, nous avons MB = MC et nous concluons que le lieu de M est une courbe, *lieu géométrique des points du plan zo*X *qui sont à égale distance d'une droite fixe* Δ', *située dans ce plan, et d'un point fixe* C *placé en dehors de ce plan.*

Ce lieu est une parabole.

On peut le démontrer géométriquement de la manière suivante.



Dans le plan Q, déterminé par le point C et par la droite Δ', le lieu des points également distants de C et de la droite Δ' est une parabole P. Soit M un point de P; par M, menons MM' perpendiculaire au plan Q.

Prenons, sur cette perpendiculaire, un point quelconque M'; abaissons M'H' perpendiculaire à Δ' et traçons M'C; enfin, par C, menons un plan XOY perpendiculaire à Δ', et projetons M', en M'', sur YOX, M'' en A, sur OX et traçons MA.

Nous avons

$$\text{MH} = \text{OA}, \qquad \overline{\text{MC}}^2 = \overline{\text{MA}}^2 + \overline{\text{AC}}^2, \qquad \text{M'H'} = \text{OM''}.$$

or $\overline{\text{OM''}}^2 - \overline{\text{M''C}}^2 = \overline{\text{OA}}^2 - \overline{\text{AC}}^2 = \overline{\text{MH}}^2 - \overline{\text{MC}}^2 + \overline{\text{MA}}^2 = \overline{\text{MA}}^2.$

Mais $\overline{\text{M'C}}^2 = \overline{\text{M'M''}}^2 + \overline{\text{M''C}}^2 = \overline{\text{MA}}^2 + \overline{\text{M''C}}^2.$

Par suite, $\text{M'C} = \text{OM''} = \text{M'H'}.$

Ainsi tous les points du cylindre parabolique ayant pour base la parabole qui, dans le plan ZOX a pour foyer le point donné C et pour directrice Δ', sont des points également éloignés de C et de Δ'.

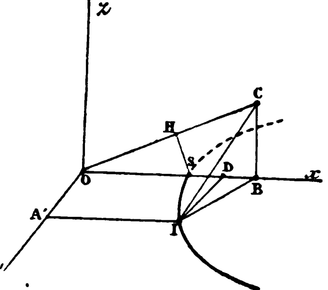
Réciproquement, tout point M', tel que MC = M'H' se projette sur ZXO en un point M tel que MC = MH. Le lieu des points qui, *dans l'espace*, sont à égale distance d'un point fixe et d'une droite fixe est un cylindre parabolique. Alors, les points qui, dans un plan, sont à égale distance d'une droite et d'un point sont situés à l'intersection de ce plan et d'un cylindre parabolique; ce lieu est donc une parabole.

On peut établir ce résultat bien simplement.

Nous avons, en effet, ramené le problème au suivant:

On donne un plan P; *une droite* Δ', *dans ce plan; et un point* C, *hors du plan. Trouver, dans le plan* P, *le lieu des points équidistants de* C *et de* Δ'.

Prenons Δ' pour axe oy, le plan P pour plan des xy, la projection de C sur oy, pour origine, la projection de OC, sur P, pour axe ox et enfin une normale au plan P, au point O, pour axe oz. Soit I un point du lieu, IA′ sa distance à oy, on a $IA' = IC$; ou, en désignant par (α, o, γ) les coordonnées de C,



$$x^2 = \overline{IC}^2 = \overline{IB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{ID}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2,$$

c'est-à-dire

$$x^2 = y^2 + (\alpha - x)^2 + \gamma^2.$$

Le lieu est représenté par l'équation

$$y^2 - 2\alpha x + l^2 = o,$$

en posant $OC = l$.

Le lieu est donc une parabole ayant pour sommet le point S, point de rencontre de ox avec la perpendiculaire élevée au milieu de OC. Le paramètre de cette parabole est égal à 2OB. Le sommet est déterminé, ainsi que le paramètre; donc, etc...

QUESTION 214

Solution par J. Lhébrard, élève du lycée de Montpellier.

Soit une courbe du quatrième degré ayant deux points doubles à l'infini. En général, il n'est pas possible de lui inscrire un parallélogramme dont les côtés soient parallèles aux asymptotes. Si la chose est possible, elle l'est d'une infinité de manières. On demande alors le lieu des centres de ces parallélogrammes. (E. C.)

Je prends pour axes de coordonnées les parallèles menées par un point quelconque du plan O, aux directions asymptotiques de la courbe. L'équation de celle-ci est alors de la forme

$$(1) \quad (x - a)(x - a')(y - b)(y - b') + Axy + Bx + Cy + D = o.$$

Les droites $x - a = o$, $x - a' = o$, $y - b = o$, $y - b' = o$ représentent les asymptotes.

Les abscisses des points de rencontre de la courbe (1) avec la droite $y = \mu$, sont données par l'équation suivante :

$$(2) \quad x^2(\mu - b)(\mu - b') - [(a + a')(\mu - b)(\mu - b') - A\mu - B]x + aa'(\mu - b)(\mu - b') + C\mu + D = o.$$

En coupant la courbe par la droite $y = \lambda$, on aurait, pour



déterminer les x des points de rencontre, une équation analogue. Pour que les droites $y = \mu$ et $y = \lambda$ soient les côtés d'un parallélogramme satisfaisant à la question, il faut et il suffit que ces deux équations en x aient les mêmes racines, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{(\lambda - b)(\lambda - b')}{(\mu - b)(\mu - b')} = \frac{(a + a')(\lambda - b)(\lambda - b') - A\lambda - B}{(a + a')(\mu - b)(\mu - b') - A\mu - B}$$
$$= \frac{aa'(\lambda - b)(\lambda - b') + C\lambda + D}{aa'(\mu - b)(\mu - b') + C\mu + D}$$

En retranchant les dénominateurs des numérateurs et divisant par $\lambda - \mu$ qui n'est pas nul, il vient :

$$\frac{\lambda + \mu - b - b'}{(\mu - b)(\mu - b')} = \frac{(a + a')(\lambda + \mu - b - b') - A}{(a + a')(\mu - b)(\mu - b') - A\mu - B}$$
$$= \frac{aa'(\lambda + \mu - b - b') + C}{aa'(\mu - b)(\mu - b') + C\mu + D}.$$

Ceci peut encore s'écrire :

$$\frac{\lambda + \mu - b - b'}{(\mu - b)(\mu - b')} = \frac{A}{A\mu + B} = \frac{C}{C\mu + D}. \quad (3)$$

Les deux derniers rapports montrent que, pour que le problème soit possible, on doit avoir :

$$AD - BC = 0.$$

Si cela est, on peut choisir μ arbitrairement, λ est donné par les deux premiers rapports (3). Il y a alors une infinité de parallélogrammes satisfaisant à la question. Les coordonnées du centre de l'un de ces parallélogrammes sont :

$$X = \frac{a + a'}{2} - \frac{A\mu + B}{2(\mu - b)(\mu - b')},$$
$$Y = \frac{\lambda + \mu}{2} = \frac{b + b'}{2} + \frac{A(\mu - b)(\mu - b')}{2(A\mu + B)}.$$

Le lieu de ce point est donc :

$$\left(X - \frac{a + a'}{2}\right)\left(Y - \frac{b + b'}{2}\right) = -\frac{A}{4}.$$

C'est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites joignant les milieux des côtés du parallélogramme formé par les quatre asymptotes à la courbe du quatrième degré considérée.

QUESTION 326

Solution par C. Grolleau, Répétiteur au lycée de Marseille.

Étant donnée une ellipse de foyers F *et* F′, *trouver le lieu décrit par un point* P *tel qu'en menant, de ce point, les tangentes à l'ellipse ayant leurs points de contact en* M, M′, *les droites* MF *et* M′F′ *se rencontrent sur l'ellipse. Montrer que ce lieu se compose des deux directrices de l'ellipse et d'une ellipse.*

Le lieu du point de rencontre des droites MF *et* M′F′ *est aussi une ellipse.* (E. N. Barisien.)

Soit N le point de l'ellipse où les droites MF et M′F′ se rencontrent.

Les coordonnées d'un point de l'ellipse pouvant se représenter par les formules

$$x = a\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad y = b\frac{2t}{1 + t^2},$$

appelons t_1, t_2, t_3 les paramètres correspondant aux points M, M′, N.

La relation qui exprime que les trois points M, F, N sont en ligne droite est :

$$\begin{vmatrix} a\dfrac{1 - t_1^2}{1 + t_1^2} & \dfrac{2bt_1}{1 + t_1^2} & 1 \\ c & 0 & 1 \\ a\dfrac{1 - t_3^2}{1 + t_3^2} & \dfrac{2bt_3}{1 + t_3^2} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

En développant et simplifiant, on obtient

$$a - c + t_1t_3(a + c) = 0.$$

En écrivant que les trois points M′, F′, N sont en ligne droite, on arriverait à la relation

$$a + c + t_2t_3(a - c) = 0$$

en éliminant t_3 entre ces deux relations, on obtient la relation

$$(1) \qquad \frac{t_1}{t_2} = \frac{(a - c)^2}{(a + c)^2}$$

entre les paramètres des points M et M′.

L'équation de la droite MM' est

$$bx(1 - t_1t_2) + ay(t_1 + t_2) = ab(1 + t_1t_2).$$

Si nous identifions cette équation avec celle de la polaire du point $P(x_0, y_0)$, nous obtenons

$$(2), (3) \qquad \frac{bx_0}{1 - t_1t_2} = \frac{ay_0}{t_1 + t_2} = \frac{ab}{1 + t_1t_2};$$

et l'élimination de t_1 et t_2 entre les équations (1), (2), (3) donne l'équation du lieu.

Or, les équations (2), (3) peuvent s'écrire

$$a - x_0 = (a + x_0)t_1t_2$$
$$2ay_0 = b(a + x_0)(t_1 + t_2).$$

En portant, dans ces équations, la valeur de t_1 tirée de (1), on obtient

$$(a + c)^2(a - x_0) = (x_0 + a)(a - c)^2t_2^2,$$
$$ay_0(a + c)^2 = b(x_0 + a)(a^2 + c^2)t_2,$$

en éliminant t_2 et supprimant la solution étrangère $x + a = 0$, on trouve, après avoir rendu les coordonnées courantes,

$$b^2(a^2 + c^2)^2x^2 + a^2(a^2 - c^2)^2y^2 - a^2b^2(a^2 + c^2)^2 = 0,$$

qui est l'équation d'une ellipse.

Remarque I. — Il est facile de voir que cette ellipse ne constitue pas le lieu complet; en effet, si les points M, M sont en ligne droite avec le foyer F, ils satisfont bien à la condition de l'énoncé, mais la relation entre t_1 et t_2 n'est plus la relation (1), mais la suivante

$$a - c + t_1t_2(a + c) = 0.$$

L'élimination de t_1 et t_2 entre les équations (2), (3) et la précédente est immédiate et l'on trouve pour lieu la droite

$$x = \frac{a^2}{c}.$$

On démontrerait de la même façon que la seconde directrice fait partie du lieu.

Remarque II. — Ces deux derniers résultats sont évidents si l'on observe que les directrices sont les polaires des foyers correspondants.

2° *Lieu du point de rencontre des droites* MF', M'F. — Les équations de ces deux droites peuvent s'écrire

$$(4) \qquad (a + c)yt_2^2 + 2b(x - c)t_2 - y(a - c) = 0$$
$$(5) \qquad (a - c)yt_1^2 + 2b(x + c)t_1 - y(a + c) = 0.$$

L'élimination de t_1 et t_2 entre ces deux équations et l'équation (1) donne l'équation du lieu. Tirons t_1 de (1) et portons-le dans (5); il nous reste à éliminer t_2 entre les équations

$$(a + c)yt_2^2 + 2b(x - c)t_2 - y(a - c) = 0,$$
$$(a - c)^5 yt_2^2 + 2b(x + c)(a^2 - c^2)^2 t_2 - y(a + c)^5 = 0.$$

L'élimination de t_2 est immédiate. On a :

$$y^4[(a+c)^6-(a-c)^6]^2=4b^2y^2(a^2-c^2)^2[(x-c)(a-c)^3-(x+c)(a+c)^3]$$
$$[(x-c)(a+c)^3-(x+c)(a-c)^3].$$

Si nous supprimons la solution étrangère $y^2 = 0$, il nous reste :

$$y^2[(a+c)^3-(a-c)^3]^2[(a+c)^3+(a-c)^3]^2$$
$$=-4b^2(a^2-c^2)\{x[(a+c)^3-(a-c)^3]+c[(a+c)^3+(a-c)^3]\}$$
$$\{x[(a+c)^3-(a-c)^3]-c[(a+c)^3+(a-c)^3]\},$$

ou, finalement,

$$b^6(c^2 + 3a^2)^2x^2 + a^2(c^2 + 3a^2)^2(a^2 + 3c^2)^2y^2 = a^2b^6(a^2 + 3c^2)^2;$$

équation d'une ellipse.

QUESTIONS PROPOSÉES

370. — Soient trois points M_1, M_2, M_3 dont on connaît les coordonnées barycentriques α_1, β_1 ... ; désignons par a', b', c' les côtés du triangle $M_1M_2M_3$, et soient l, m, n, des indéterminées satisfaisant à la condition $l + m + n = 0$. Montrer que les coordonnées d'un point quelconque M du cercle circonscrit $M_1M_2M_3$ peuvent être représentées par

$$\alpha : \beta : \gamma : = \left(\frac{a'^2\alpha_1}{l\sigma_1} + \frac{b'^2\alpha_2}{m\sigma_2} + \frac{c'^2\alpha_3}{n\sigma_3}\right) : \ldots$$

formule dans laquelle on a posé :

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma.$$

De même, les coordonnées cartésiennes homogenes de M sont

$$X : Y : Z = \left(\frac{a'^2X_1}{l} + \frac{b'^2X_2}{m} + \frac{c'^2X_3}{n}\right) : \ldots$$

Si l, m, n, sont données, dire sur quelle région du cercle se trouve M. *(A. Poulain.)*

371. — Trouver toutes les valeurs rationnelles de a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'' qui satisfont aux équations

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad ab + a'b' + a''b'' = 0,$$
$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0,$$
$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \quad ca + c'a' + c''a'' = 0.$$

(*E. Catalan*).

372. — D'un point quelconque A d'une ellipse donnée on abaisse les trois normales AB, AC, AD. Si le point A se déplace sur l'ellipse, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit au triangle BCD décrivent, chacun, une ellipse.

(*E.-N. Barisien.*)

373. — D'un point P du plan d'une ellipse donnée on abaisse les quatre normales à l'ellipse, dont les pieds sont A, B, C, D; et on considère les cercles circonscrits aux quatre triangles ABC, ACD, ABD et BCD.

1° Le lieu des points P tels que la somme des carrés des distances des centres de ces quatre cercles au centre de l'ellipse soit constante est une certaine hyperbole H ;

2° Le lieu des points P tels que la somme des carrés des rayons des quatre cercles soit constante est une autre hyperbole H' concentrique et homothétique à l'hyperbole H;

3° Quel que soit le point P, la somme des puissances du centre de l'ellipse par rapport aux quatre cercles est constante. (*E.-N. Barisien.*)

374. — En un point A situé sur une parabole P on mène la normale à la parabole. Soit A_1 le point de contact de cette normale avec la développée. Soit, de même, A_2 le centre de courbure de la seconde développée correspondant à A_1, et A_2 le centre de courbure de la seconde développée correspondant à A_2. Si R_0, R_1, R_2 désignent les rayons de courbure successifs de la parabole, de la première et de la seconde développée en A, A_1, A_2, on a, quel que soit le point A pris sur la parabole, la relation

$$3R_0R_2 = 9R_0^2 + 4R_1^2.$$

(*E.-N. Barisien.*)

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13996-6-93.

NOTE SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS
DE LA PARABOLE ET DE SA DÉVELOPPÉE
OBTENUES EN CONSIDÉRANT CES COURBES COMME UNICURSALES

Par M. **E.-N. Barisien,** ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir page 146.)

Application des formules précédentes à quelques normales remarquables.

1° Considérons la normale abaissée de l'un des points d'intersection réels de la parabole avec sa développée.

On obtient cette normale en faisant

$$Y = y'.$$

Alors
$$pm^3 = \frac{p(m^2 + 2)}{m},$$
équation qui revient à

$$(m^2 - 2)(m^2 + 1) = 0.$$

Les valeurs réelles sont $m = \pm \sqrt{2}$.

Considérons la valeur $m = -\sqrt{2}$.

On trouve alors, pour les coordonnées de M, C et C';

$$\text{M}\begin{cases} x_1 = p, \\ y_1 = p\sqrt{2}, \end{cases} \qquad \begin{matrix}\text{C} \\ \text{et} \\ \text{N}\end{matrix}\begin{cases} X=4p=x'', \\ Y=-2p\sqrt{2}=y', \end{cases} \qquad \text{C}'\begin{cases} \xi = \dfrac{7p}{4}, \\ \eta = p\dfrac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

L'équation de cette normale est donc

$$y = -(x - 2p)\sqrt{2}.$$

On trouve facilement que :

$$\text{OR} = \text{RD}, \qquad \text{RC} = 2\text{MR}, \qquad \text{OS} = \text{SR}, \qquad \text{CC}' = 3\text{MC}',$$
$$\mu = \nu = -2\sqrt{2},$$
$$\text{D} = \text{R} = \text{MC} = 3p\sqrt{3},$$
$$\text{N'C} = 3\text{MM}'.$$

Donc, la projection, sur l'axe, du point M de cette normale remarquable, est le sommet de la développée.

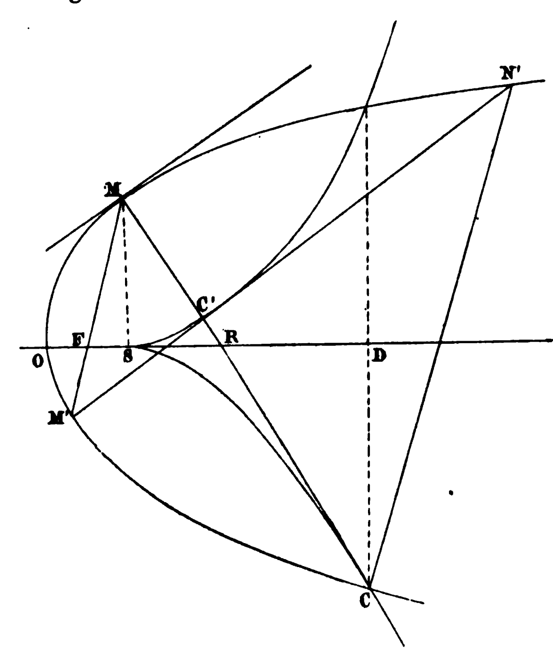
Les droites MM' et N'C sont parallèles.

La droite MM' passe par le foyer F.

Cette normale jouit encore de deux autres propriétés remarquables.

Elle est à la fois tangente, en C, à la développée, et normale, en C′, à cette même développée.

Cette normale est celle qui intercepte sur la parabole la corde de longueur minima.



2° *Normale à l'un des points d'intersection réels de la parabole et de sa développée.*

On doit avoir $x_1 = \xi$,

ou $$4p = \frac{pm^2}{2},$$

ce qui donne $$m = -2\sqrt{2}.$$

On trouve :

M et C′ $\begin{cases} x_1 = \xi = 4p, \\ y_1 = \eta = 2p\sqrt{2}, \end{cases}$ C $\begin{cases} X = 13p, \\ Y = -16p\sqrt{2}, \end{cases}$ N $\begin{cases} x' = \dfrac{25p}{4}, \\ y = -\dfrac{5p\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$

et $R = 27p = D'$, $D = \dfrac{R}{4}$, $OR = 5p$.

L'équation de cette normale est

$$y = -2(x - 5p)\sqrt{2}.$$

3° *Normale telle que les droites* MM', NN' *soient perpendiculaires.*

On a $\mu\nu = -1$, ou $m = 2\sqrt{5}$.

La normale a pour équation

$$y = 2\sqrt{5}(x - 11p).$$

4° *Normale telle que les aires curvilignes* OPM, SCD *soient égales.*

On a
$$\frac{p^2m^3}{3} = \frac{3p^2m^5}{5},$$

d'où
$$m = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

L'équation de cette normale est donc

$$y = \frac{\sqrt{5}}{3}\left(x - \frac{23p}{18}\right).$$

5° *Normale telle que* D = 2R.

On trouve $\mathrm{MR} = \mathrm{RC} = \frac{\mathrm{CN}}{2}$.

Son équation est $y = x - \frac{3p}{2}$.

Cette normale est celle qui intercepte dans la parabole le segment d'aire minima.

$$\mathrm{M}\begin{cases} x_1 = \frac{p}{2}, \\ y_1 = -p, \end{cases} \quad \mathrm{C}\begin{cases} \mathrm{X} = \frac{5p}{2}, \\ \mathrm{Y} = p, \end{cases} \quad \mathrm{C'}\begin{cases} \xi = \frac{11p}{8}, \\ \eta = -\frac{p}{8}, \end{cases} \quad \mathrm{N}\begin{cases} x' = \frac{9p}{2}, \\ y' = 3p. \end{cases}$$

6° *Normale telle que* $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{R}}{2}$.

On trouve $m = 2$, avec l'équation

$$y = 2(x - 3p).$$

$$\mathrm{M}\begin{cases} x_1 = 2p, \\ y_1 = -2p, \end{cases} \quad \mathrm{C}\begin{cases} \mathrm{X} = 7p, \\ \mathrm{Y} = 8p, \end{cases} \quad \mathrm{C'}\begin{cases} \xi = \frac{5p}{2}, \\ \eta = -p, \end{cases} \quad \mathrm{N}\begin{cases} x' = \frac{9p}{2}, \\ y' = 3p. \end{cases}$$

7° *Normale telle que* $\mathrm{D'} = \frac{\mathrm{R}}{2}$.

On trouve $m = \frac{2}{\sqrt{5}}$, avec l'équation

$$y = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(x - \frac{7p}{5}\right).$$

8° *Normale telle que* $2D' = D$.

On trouve $$m = \frac{1}{3}\sqrt{4 + 2\sqrt{22}}.$$

9° Parmi les *normales remarquables*, il y en a deux que M. Ossian Bonnet avait étudiées en 1844. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 65.)

a) La normale interceptant dans la parabole l'*aire minima* est celle qui est inclinée à 45° sur l'axe. C'est d'ailleurs celle qui est étudiée sous le paragraphe 5.

b) La normale interceptant dans la parabole l'*arc minimum* a pour équation

$$2x + y\sqrt{3} = \frac{10p}{3}.$$

Pour cette normale, le rayon de courbure $= \frac{2}{3}$ de la corde normale.

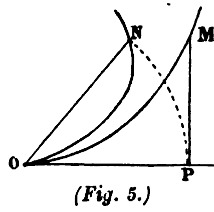
(*A suivre.*)

SUR UN THÉORÈME DE JAMES GREGORY

(*Suite*, voir page 145.)

Note I.

11. — On voit le germe du théorème de Gregory dans l'ouvrage de Wallis, *de Cycloide* (Oxford, 1659). Newton l'a également retrouvé sous une autre forme plus élégante, qui pourrait, avec avantage, lui être suppléée (*Methodus fluxionum.*) Gregory, puis Barrow (*Lectiones geometricæ*, 1669) avaient entrevu cette construction nouvelle :



(*Fig. 5.*)

Considérons une courbe quelconque OM et une droite quelconque OP. Du point M abaissons une ordonnée MP, menons l'arc de cercle NP égal en longueur à l'ordonnée MP : il est facile de voir que les arcs du lieu N sont égaux à leurs correspondants sur OM, etc. La courbe ON est donc l'*evoluta* de la courbe OM.

Newton ramène, au moyen de cette remarque, la quadrature et la rectification des spirales à celles des paraboles.

Note II.

12. — Guido-Grandi, dans l'opuscule intitulé *Flores Geometrici* (Florence 1728) appelle rosace (*) *(rhodonea)* la courbe déterminée ainsi : *on prend, à partir du point* A *d'une circonférence fixe de centre* O, *les arcs* AN, AH *en proportion donnée* k;

(*) Nous avons représenté (fig. 6, 7, 8, 9) quelques rosaces.
L'équation générale des rosaces est, en coordonnées polaires,

$$\rho = a \cos p\omega. \qquad (1)$$

En changeant ω en $\frac{\pi}{2p} - \omega$, on peut aussi représenter les rosaces par l'équation

$$\rho = a \sin p\omega.$$

La construction de la normale aux rosaces se fait très simplement en appliquant le théorème suivant qui n'a peut être pas été remarqué.

Théorème. — *La normale en un point* M (ρ_1, ω_1) *d'une rosace coupe le vecteur faisant avec* Ox *un angle égal à* $(p + 1)\omega_1$, *en un point* M' *tel que*

$$OM' = a\frac{p}{p-1}.$$

On peut le démontrer de la manière suivante.

Prenons l'équation (1); l'équation de la normale au point ρ_1, ω_1, est, comme l'on sait,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos(\omega - \omega_1) + \frac{1}{\rho'_1}\sin(\omega - \omega_1),$$

ou, dans le cas présent,

$$\frac{a}{\rho} = \frac{\cos(\omega - \omega_1)}{\cos p\omega_1} - \frac{\sin(\omega - \omega_1)}{p \sin p\omega_1}.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$a\frac{p \sin p\omega_1 \cos p\omega_1}{\rho} = (p-1)\cos(\omega - \omega_1)\sin p\omega_1 + \cos(\omega - \omega_1)\sin p\omega_1 - \sin(\omega - \omega_1)\cos p\omega_1.$$

On a donc

$$a\frac{p \sin p\omega_1 \cos p\omega_1}{\rho} = (p-1)\cos(\omega - \omega_1)\sin p\omega_1 + \sin[(p+1)\omega_1 - \omega].$$

Faisons $\omega = (p+1)\omega_1$, nous avons

$$\rho = \frac{p}{p-1}a.$$

Ce qui établit la proposition énoncée

On peut aussi construire directement la tangente, en appliquant le théorème suivant :

La tangente au point $M(\rho_1, \omega_1)$ *d'une rosace correspondant à l'équation*

$$\rho = a \cos p\omega,$$

coupe le vecteur oz *qui fait avec* ox *l'angle* $\frac{\pi}{2} + (p+1)\omega_1$ *en un point* K, *qu'on détermine en prenant* $OK = \frac{OK'}{p-1}$; K' *désignant le point où la perpendiculaire élevée, en* M, *à* OM, *rencontre* oz.

L'une de ces courbes ($\rho = R \cos 2\omega$), la rosace à quatre branches,

et sur OH, *la longueur* OM *égale à la perpendiculaire abaissée de* N *sur* OA; *le lieu du point* M *est la courbe en question.*

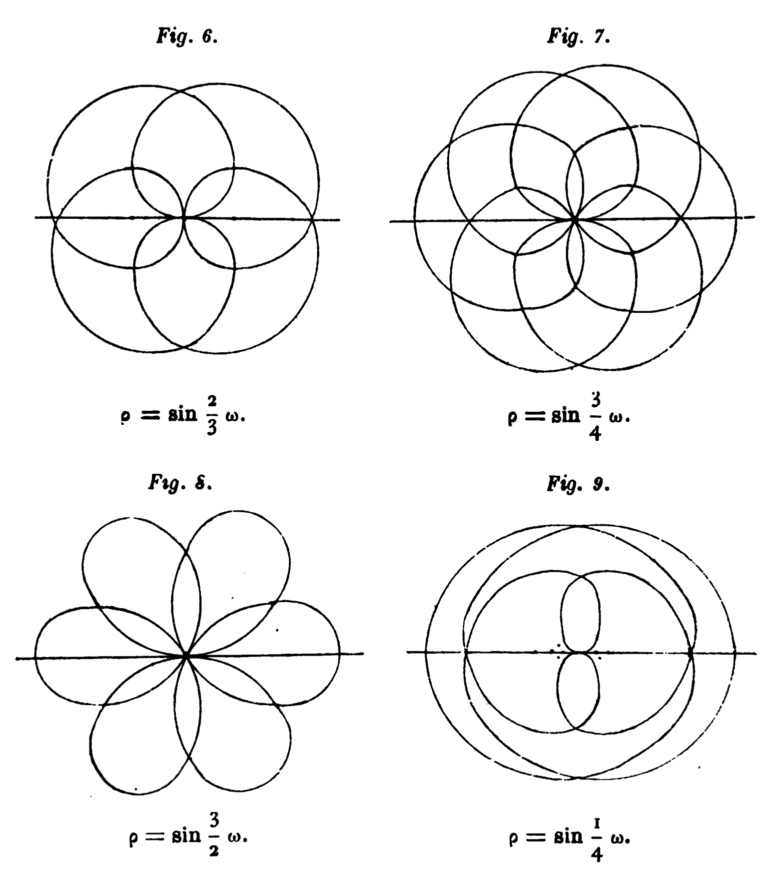


Fig. 6. $\rho = \sin \frac{2}{3} \omega.$

Fig. 7. $\rho = \sin \frac{3}{4} \omega.$

Fig. 8. $\rho = \sin \frac{3}{2} \omega.$

Fig. 9. $\rho = \sin \frac{1}{4} \omega.$

Il trace les tangentes et trouve que *l'aire de chaque foliole est égale à la moitié de celle du secteur circulaire circonscrit* et que *la courbe se rectifie par un arc d'ellipse.* Il détermine des lunules quarrables.

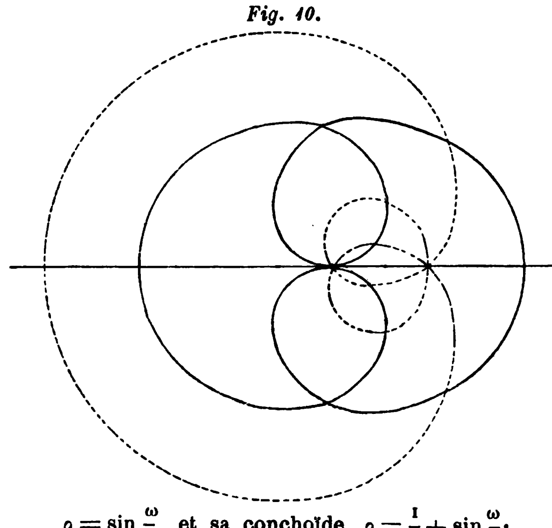
---

nous a servi à construire le trisecteur que nous avons récemment présenté au congrès de Besançon. En général, la rosace qui correspond à l'équation $\rho = R \cos p\omega$, peut servir de base à un instrument permettant de partager, très simplement, un angle en $(p + 1)$ parties égales. G. L.

Voici ses principaux théorèmes traduits en style géométrique moderne :

Si k *est entier, la courbe se compose de* 2k *feuilles distinctes, ou*

Fig. 10.



$\rho = \sin\frac{\omega}{2}$ et sa conchoïde $\rho = \frac{1}{2} + \sin\frac{\omega}{2}$.

de k, *selon que* k *est pair ou impair; si* k *est incommensurable, la courbe comprend tous les points du cercle générateur.*

Désignons par R (a, k) la rosace décrite avec le paramètre k, avec le cercle de rayon a *: la rosace* R $(a, 1)$ *se compose de deux cercles tangents ayant chacun un rayon* $\frac{a}{2}$.

La rosace $R\left(a, \frac{1}{2}\right)$ *peut encore se construire ainsi : décrire la circonférence* OB, *mener* BH *quelconque, puis* OH *et prendre* OM = OK, *le lieu de* M *est le lieu cherché.*

(Fig. 11.)

Ou bien : *on prend* KM = KL, *ce qui donne le même point* M (*).

(*) Cette courbe a la forme de deux cardioïdes égales et symétriques par rapport à leur point de rebroussement qui est commun. On peut encore l'obtenir en projetant sur le rayon OH le milieu G de l'arc BH, ou en rabattant sur BH ce même milieu G, et de plusieurs autres manières.

Sur OH *prenons de part et d'autre de* H *des longueurs* Hm, Hm', *égales à* HB, *le lieu des points* m, m' *est une conchoïde de cette rosace* (fig. 13).

Sur un rayon OA *de la base d'un cône circulaire droit, prenons un point quelconque* I, *décrivons la circonférence de rayon* OI : *le cylindre droit qui a cette circonférence pour base coupe la surface latérale du cône suivant une courbe qui, après le développement de cette même surface latérale, est une feuille de rosace. De là, une nouvelle quadrature* (*).

Sur le cercle générateur comme grand cercle, décrivons une sphère, que nous couperons par le cylindre droit construit sur la rosace : l'intersection des deux surfaces est une courbe à double courbure que l'auteur appelle *clélie* (*clœlia*)*; la clélie est rectifiable par un arc d'ellipse, et elle détache de la surface hémisphérique des surfaces quarrables si* k *est entier, ce qui résout le problème de Viviani avec une grande généralité. La solution de Viviani correspond à* $k = 1$ (**).

A titre d'exercices géométriques élémentaires, nous ajouterons ce qui suit :

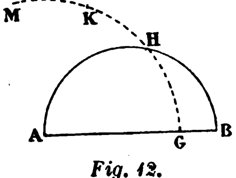


Fig. 12.

Le limaçon $L\left(a, \frac{a}{2}\right)$ *est identique à la rosace* $R\left(2a, \frac{1}{3}\right)$. *On peut le construire ainsi : de l'extrémité* A *du diamètre* AB, *décrivons un arc circulaire quelconque* GH *qui coupe en* H *la circonférence fixe* AHB, *puis prenons arc* HM = 2*arc* HB ; *le point* M *appartient au lieu cherché.*

(*) D'après une remarque de Jacques Bernoulli, *une surface quelconque tracée sur la surface latérale d'un cône droit est à sa projection sur le plan de la base dans le rapport du côté du cône au rayon de la base.* De là le moyen de construire sur cette surface une infinité de courbes quarrables. De là également la quadrature immédiate de la rosace.

(**) La spirale sphérique de Pappus correspond à $k = \frac{1}{4}$: c'est la première quadrature d'une figure limitée par une courbe à double courbure sur une surface courbe.

Montucla a observé que *la surface latérale des deux cylindres de Viviani, dans la sphère, est quarrable;* et Bossut, que *le volume excédent de la sphère se calcule de même, sans l'intervention d'aucune transcendante.*

Fuss a fait voir que *les remarques de Montucla et de Bossut s'appliquent à une clélie quelconque, pourvu que* k *soit entier.*

Nous terminerons par l'énoncé de deux propriétés intéressantes de la courbe de Viviani ou clélie $C(a, 1)$; la première, due à Jean Bernoulli; la seconde à d'Arrest (*Nouv. An.* 1852); elles sont susceptibles de généralisation.

C'est le lieu des points de la sphère tels que les accroissements sont égaux en longitude et en latitude, c'est aussi la projection stéréographique d'une lemniscate.

La rosace peut se construire par points de la manière suivante : *De part et d'autre du point fixe* A, *on prend arc* AN $= (k - 1)$ *arc* AH *et l'on projette* N *sur* OH (fig. 13).

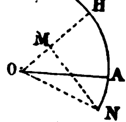


Fig. 13.

Ou bien (fig. 11), *on prend arc* AN $= 2k$ *arc* AH *et sur* OH, *on porte* OM = AN.

Ou bien (fig. 11), *on prend un rayon moitié moindre, on construit arc* BN = k *arc* BH *et on rabat* AH *sur* AN *par un arc de cercle.*

Cette construction est la plus commode de toutes.

Deux circonférences égales tournent uniformément autour d'un point fixe qui leur est commun, les vitesses angulaires étant entre elles dans un rapport constant k. *Le lieu de leur intersection variable n'est autre chose que la rosace* $R\left(2a, \dfrac{1-k}{1+k}\right)$. *Si l'une des circonférences est remplacée par une droite, le lieu est la rosace* $R(2a, 1 - k)$.

Deux tringles égales et articulées, telles qu'un compas, sont mobiles dans leur plan de manière que leurs extrémités libres se meuvent uniformément sur la même circonférence: le lieu de l'articulation est une rosace.

La podaire de l'épicycloïde (*) $E(a, b)$ *n'est autre chose que la rosace* $R\left(a + 2b, \dfrac{a}{a+2b}\right)$. Ainsi *la podaire de la cardioïde* $E(a, a)$ *est identique au limaçon* $R\left(3a, \dfrac{1}{3}\right)$. *La podaire de l'hypocycloïde à* n *rebroussements* $E(na, -a)$, *est identique à la rosace* $R\left(na - 2a, \dfrac{n}{n-2}\right)$.

L'épitrochoïde $E(a, b, a + b)$ *est la rosace*

$$R\left(2a + 2b, \frac{a}{a+2b}\right).$$

Réciproquement, toute rosace est une podaire d'épicycloïde et une épitrochoïde de la forme $E(a, b, a + b)$.

La trajectoire du centre d'une circonférence qui reste toujours

---

(*) *a*, rayon du cercle fixe; *b*, rayon du cercle mobile; *b* peut recevoir le signe + ou le signe —, suivant que le roulement est extérieur ou intérieur.

tangente à deux droites OP, OQ *se mouvant uniformément autour du point* O *est l'inverse d'une rosace.*

Développons sur un plan la surface latérale d'un cône circulaire droit après qu'il a été coupé obliquement par un plan. La courbe obtenue est l'inverse d'une conchoïde de rosace qui se quarre et se rectifie par des segments et des arcs d'ellipse, de parabole ou d'hyperbole.

Note III.

13. — Dans la première partie de cet ouvrage, l'auteur détermine la tangente à la logarithmique, sa quadrature, sa rectification, le volume et la surface latérale du solide de révolution qu'elle produit en tournant autour de sa base et les centres de gravité de ses segments et du même solide de révolution. C'est donc lui, et non Guido-Grandi, qui doit être réputé comme ayant le premier démontré les théorèmes de Huyghens sur la logarithmique.

Dans la seconde partie, il étudie les rapports de la spirale hyperbolique avec la logarithmique et avec l'hyperbole, en détermine la tangente, la quadrature, la forme et la rectification.

Cet ouvrage, où les démonstrations sont écrites dans le style de la géométrie ancienne, est très remarquable.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE FRÉGIER
RELATIF AUX QUADRIQUES

Par M. **A. Noyer**, élève au Collège Chaptal.

Nous nous proposons d'établir, par la géométrie pure, la proposition suivante, connue sous le nom de théorème de Frégier.

Si par un point fixe O *d'une quadrique* Γ, *on mène des parallèles à trois diamètres conjugués d'une quadrique* ω, *qui coupent* Γ *en trois points* A, B, C, *le plan* ABC *pivote autour d'un point fixe, lorsque les diamètres conjugués varient.*

Si OC reste fixe, OB, OA vont se déplacer dans un plan

parallèle au plan diamétral conjugué de OC, dans la quadrique ω; ce plan que nous appellerons, par abréviation, *plan conjugué de* OC, coupe la quadrique Γ suivant une conique; et nous savons, d'après le théorème de Frégier relatif aux coniques, que AB pivotera autour d'un point fixe P, tel que OP est conjugué de la tangente OT à la conique, section de Γ par le plan AOB. De la même manière, si OB reste fixe, AC passera par un point fixe Q situé sur la droite conjuguée de la tangente OT′; les deux droites BQ et CP se coupent donc en un point I, situé sur la droite Ox, conjuguée du plan diamétral de ω, parallèle au plan tangent, en O, à la quadrique Γ; car (OC, OP, OT) et (OB, OQ, OT′) sont respectivement des couples de directions conjuguées de la quadrique directrice ω.

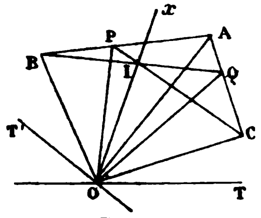


Fig. 1.

Cela posé, considérons un autre couple OA′, OB′, OC′ tel que OA, OB, OC *(fig. 2)* (*) et prenons OK, intersection des plans conjugués de OA et de OA′, de telle sorte que AOA′ soit le plan conjugué de OK.

Soient OH la droite conjuguée de OK dans le plan BOC, conjugué de OA; et OH′, conjuguée de OK dans le plan B′OC′; les droites OA, OH, OA′, OH′ sont dans le même plan, conjugué de OK, car OK, OH, OA et OK, OH′, OA′ sont des couples de droites conjuguées; il résulte de là que, si K, H, H′ sont les points de rencontre des droites OK, OH, OH′ avec la quadrique Γ, les droites AH et A′H′ se coupent en un point M, qui est le point de Frégier du plan conjugué de OK, point analogue aux points P et Q, que nous avons considérés précédemment *(fig. 1)*. Du reste, le point de Frégier N, du plan conjugué de OA, est à

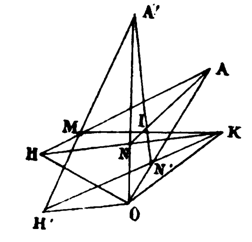


Fig. 2.

(*) Les points N, N′ sont deux points situés respectivement sur les droites HK, H′K; mais ils n'appartiennent pas nécessairement aux droites OA′, OA comme le représente, à tort, la fig. 2.

l'intersection de BC et de HK, et de même N', du plan conjugué de OA', est à la rencontre de B'C' et de H'K. Mais, d'après la première partie, les droites KM, AN, A'N' se coupent en un point I, intersection de la droite Ox, définie précédemment, et de KM; du reste, AN et A'N' sont respectivement dans les plans ABC et A'B'C'; si donc ABC reste fixe, tous les plans tels que A'B'C', passent par le point I intersection de Ox et de ABC.

On voit, de plus, que le point fixe I est situé sur la droite passant par O dont la direction est conjuguée, relativement à la quadrique directrice ω, de la direction du plan tangent en O à la quadrique donnée Γ.

DEMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL
DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS

par M. **Guitton**, professeur au lycée d'Amiens.

Ce théorème dû à d'Alembert s'énonce ainsi :

Toute équation entière à coefficients de la forme a + bi (a, b *étant réels*) *a au moins une racine de cette forme.*

Je rappelle d'abord deux choses :

1. — Au début de l'algèbre, on montre que si un polynôme $f(x)$, de degré n, en x, s'annule pour n valeurs différentes de x: $a_1, a_2, \ldots a_n$; on a

$$f(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$$

A étant le coefficient de x^n. Si x varie de $-\infty$ à $+\infty$, $f(x)$ change de signe en s'annulant et conserve un signe invariable dans chacun des intervalles formés par les quantités

$$-\infty, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_n, \quad +\infty.$$

D'ailleurs, $f(x)$ ne peut s'annuler pour une $(n + 1)^{\text{ème}}$ valeur d'x, à moins d'être identiquement nul.

2. — Pour démontrer le théorème de d'Alembert, il suffit d'examiner le cas où les coefficients sont réels. S'il n'en est pas ainsi, l'équation s'écrit

$$P + Qi = 0,$$

P et Q étant des polynômes entiers à coefficients réels, et l'on est ramené à démontrer que l'équation

$$P^2 + Q^2 = 0,$$

admet une racine.

Soit donc l'équation à coefficients réels

$$z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_{n-1} z + p_n = 0.$$

Je supposerai $p_n \neq 0$; sinon, l'équation admettrait une racine: $z = 0$.

Je vais montrer qu'il existe un nombre positif ρ et un angle φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ tels qu'en faisant la substitution

$$z = \rho(\cos\varphi + \sin\varphi),$$

l'équation soit vérifiée.

Il faut pour cela que ρ et φ satisfassent, simultanément, aux deux équations

$$\begin{cases} \rho^n \cos n\varphi + p_1\rho^{n-1}\cos(n-1)\varphi + \dots + p_{n-1}\rho\cos\varphi + p = 0 \\ \rho^n \sin n\varphi + p_1\rho^{n-1}\sin(n-1)\varphi + \dots + p_{n-1}\rho\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

ou bien que l'on ait, en divisant par ρ^n et en posant $\dfrac{1}{\rho} = r$:

(1) $\cos n\varphi + p_1 r\cos(n-1)\varphi + \dots + p_{n-1}r^{n-1}\cos\varphi + p_n r^n = 0,$

(2) $\sin n\varphi + p_1 r\sin(n-1)\varphi + \dots + p^{n-1}r^{n-1}\sin\varphi = 0.$

Étudions d'abord la première de ces deux équations.

Comme $\cos p\varphi$ est un polynôme de degré p en $\cos\varphi$, le premier membre de (1) est un polynôme de degré n en $\cos\varphi$, si on l'ordonne suivant les puissances décroissantes, on a, en posant $\cos\varphi = x$

(3) $$f(x, r) = Ax^n + \dots = 0;$$

A est une constante; les autres coefficients sont des polynômes en r.

Pour $r = 0$, cette équation se réduit à

$$\cos n\varphi = 0.$$

Elle est vérifiée si

$$\varphi = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Elle admet donc n racines distinctes en x

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \qquad \alpha_{k+1} = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right).$$

De plus, on peut trouver une valeur R de r assez grande pour que $f(x, R)$ soit toujours du signe de son dernier terme $p_n R^n$, quel que soit φ; et, par conséquent, ne s'annule pour aucune valeur de x comprise entre -1 et $+1$. Une fois pour toutes, nous ne ferons varier x que dans l'intervalle $(-1, +1)$. Il suffit en effet de choisir R pour que le polynôme en R obtenu en remplaçant dans (1) tous

les coefficients par leurs modules et les cosinus par 1 soit toujours du signe de son dernier terme.

On supposera dans la suite qu'il n'existe pas de valeur r telle que $f(x, r)$ s'annule pour $x = 1$ ou $x = -1$, sans cela l'équation donnée admettrait la racine réelle $\pm \rho = \pm \frac{1}{r}$ et le théorème serait démontré.

Supposons, un instant, que pour $r = r', (r' < R)$, le polynôme $f(x, r')$ s'annule pour n valeurs distinctes de x (ceci est vrai si $r' = 0$)

$$x'_1, x'_2, \ldots x'_n, \qquad -1 < x'_i < 1,$$

on aurait $f(x, r') = A(x - x'_1)(x - x'_2) \ldots (x - x'_n)$.

Nous allons montrer que l'équation (3) définit n fonctions de r

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_n,$$

égales à $\qquad x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots \quad x'_n$

pour $r = r'$, et continues pour cette valeur de r.

Soit, en effet, 2ε un nombre inférieur à chacun des intervalles formés par les nombres

$$-1, \quad x'_1, \quad x'_2, \ldots x'_n, \quad 1.$$

Nous avons rappelé que

$$f(x'_i + \varepsilon, r') \quad \text{et} \quad f(x'_i - \varepsilon, r')$$

sont de signes contraires; en valeur absolue, ces quantités sont plus grandes que $A\varepsilon^n$ puisque chaque facteur binôme $x - x'_k$, pour $x = x'_i \pm \varepsilon$ est plus grand en valeur absolue que ε.

On sait que l'on a

$$(1) \qquad f(x, r' + h) - f(x, r') = hf'_r(x, r' + \theta h).$$

Nous calculerons une valeur trop grande de f'_r si nous remplaçons d'abord dans (1) les coefficients par leurs modules, les cosinus par 1 et $r' + \theta h$ par R. Soit M le nombre ainsi obtenu

$$| \; f(x, r' + h) - f(x, r') \; | < Mh.$$

Si donc $\qquad \eta = \dfrac{A\varepsilon^n}{M},$

pour toutes les valeurs de h, telles que

$$| h | < \eta,$$

$f(x'_i + \varepsilon, r' + h)$ et $f(x'_i + \varepsilon, r')$ auront le même signe.
$f(x'_i - \varepsilon, r' + h)$ et $f(x'_i - \varepsilon, r')$ » »

et par conséquent,

$f(x'_i + \varepsilon, r' + h)$ et $f(x'_i - \varepsilon, r' + h)$ ont des signes contraires.

Maintenant, dans $f(x, r' + h)$, faites varier x de $x'_i - \varepsilon$ à $x'_i + \varepsilon$: f, qui est une fonction continue de x, s'annulera au moins une fois pour $x = x_i$. f ne s'annulera d'ailleurs qu'une fois, car chacun des intervalles $(x'_i - \varepsilon, x'_i + \varepsilon)$ contient au moins une racine, et ces n intervalles n'empiètent pas les uns sur les autres.

On a donc, quand r varie de $r' - \eta$ à $r' + \eta$:

$$f(x, r) = A(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Comme, à chaque valeur de ε, correspond une valeur de η; $x_1, x_2, \dots x_n$ sont des fonctions continues de r pour $r = r'$.

Pour $r' = 0$, l'équation $f(x, r') = 0$ a n racines distinctes, nous pourrons donc calculer un nombre $\eta = \eta_1$ tel que r variant de o à η_1, l'équation $f(x, r)$ continue à avoir n racines distinctes; ensuite, nous ferons $r' = \eta_1$, nous calculerons η_2 tel que r variant de η_1 à $\eta_1 + \eta_2$, f ait toujours n racines distinctes; puis nous ferons $r' = \eta_1 + \eta_2$, etc. Nous pourrons ainsi étendre, de proche en proche, nos n fonctions $x_1, x_2, \dots x_n$ de r; nous avons montré qu'elles variaient d'une manière continue en restant dans l'intervalle $(-1, 1)$.

Autrement dit, si r est assez petit, lorsque x varie de -1 à 1, $f(x, r)$ s'annule pour n valeurs distinctes de x.

Mais, pour $r = R$, f ne s'annule plus; donc, quand nous ferons croître r continûment à partir de o, nous obtiendrons une valeur $r = r_1$ pour laquelle l'équation cessera d'avoir n racines distinctes, alors qu'elle en avait pour toutes les valeurs plus petites.

Je dis qu'il y a deux racines consécutives x_i, x_{i+1} dont la différence, qui varie continûment avec r, est devenue nulle. Si, en effet, cette différence restait supérieure à un nombre donné quand r est aussi voisin que l'on veut de r_1 on pourrait étendre ces deux racines distinctes au-delà de r_1.

Nous considérons maintenant l'équation (2); son premier membre est égal à sin φ multiplié par un polynôme de degré $n - 1$ en x.

Si $r = 0$, l'équation se réduit à

$$\sin n\varphi = 0;$$

elle est vérifiée pour les valeurs de φ :

$$\varphi = \frac{k\pi}{n}; \qquad k = 0, 1, 2, \dots n.$$

La première seule annule le facteur sin φ; l'équation (2) pour $r = 0$ a donc n racines distinctes en x :

$$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, \qquad \beta_k = \cos\frac{k\pi}{n}.$$

Observons en passant, cette remarque est très importante : que l'on a

$$-1 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots < \alpha_{n-1} < \beta_{n-1} < \alpha_n < 1.$$

On montrera, comme tout à l'heure, que l'équation (2), débarrassée du facteur sin φ, définit $n - 1$ fonctions,

$$y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$$

qui varient d'une manière continue avec r; on les étendra de proche en proche et l'on ne s'arrêtera que si, pour $r = r'_1$, deux racines consécutives y_j et y_{j+1} deviennent égales.

Lorsque r est suffisamment petit, les racines x et y se séparent mutuellement,

$$-1 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n < 1.$$

Je dis que, r variant de 0 à r_1 (en supposant par exemple $r_1 < r'_1$), deux racines consécutives deviendront égales. S'il n'en était pas ainsi, on aurait toujours

$$x_i < y_i < x_{i+1}.$$

Mais pour $r = r_1$, on a

$$x_i = y = x_{i+1}.$$

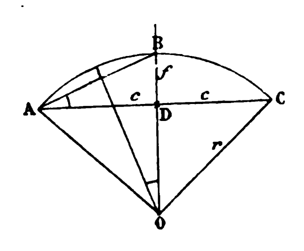
Le théorème est donc démontré.

CALCUL D'UN SEGMENT CIRCULAIRE
DONT ON CONNAIT LA CORDE ET LA FLÈCHE

Par M. **A. Aubry.**

I. — Rectification de l'arc.

1. — Appelons $2c$ la corde, f la flèche et θ le rapport $\frac{f}{c}$.



Le rapport θ représente la tangente du quart de l'angle au centre AOC (*fig. 1*).

On a donc

$$(\alpha) \quad \text{arc ABC} = 4r\left(\theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \ldots\right),$$

comme d'autre part

$$(\beta) \quad 2r = \frac{c^2 + f^2}{f} = \frac{c^2}{f}(1 + \theta^2),$$

on aura, en remplaça nt et effectuant:

(1) $$\text{arc ABC} = 2c\left(1 + \frac{2}{1.3}\theta^2 - \frac{2}{3.5}\theta^4 + \frac{2}{5.7}\theta^6 - \ldots\right);$$

d'où, si l'amplitude est faible, approximativement:

(2) $$\text{arc ABC} = 2c\left(1 + \frac{2}{3}\theta^2\right).$$

(Voir la note I.)

2. — On aura un résultat plus exact en faisant intervenir les puissances quatrièmes. Seulement, pour avoir une formule élégante et commode, nous la supposerons formée de deux facteurs.

Or, le trinôme $-\frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$ s'annule pour $x = \frac{5 \pm 15\sqrt{\frac{11}{5}}}{2}$. Remplaçant le radical par sa valeur approchée $\sqrt{\frac{45}{20}} = \frac{3}{2}$, et opérant la décomposition en facteurs; on trouve que ce trinôme peut s'écrire

$$\left(1 - \frac{x}{6}\right)\left(1 + \frac{5x}{6}\right),$$

d'où, la seconde approximation

(3) $$\text{arc ABC} = 2c\left(1 + \frac{5}{6}\theta^2\right)\left(1 - \frac{1}{6}\theta^2\right).$$

Pour l'arc de 60°, l'erreur relative résultant de l'emploi de (2) sera 0.0205, et celle qui provient de l'emploi de (3), 0.007. La forme de la série (1) fait voir d'ailleurs que (2) est en excès et (3) en défaut.

3. — On peut encore trouver une formule plus approchée. Posons

(α) $$1 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{15}x^2 + \ldots = A + \frac{B}{1 + Cx} = (A+B) - BCx + BC^2x^2 - BC^3x^3 \ldots$$

A, B, C désignant des coefficients inconnus.

Identifiant les deux séries dans leurs trois premiers termes, on trouve successivement:

$$C = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{10}{3}, \quad A = \frac{13}{3},$$

de sorte que le second membre de (α) peut s'écrire

$$1 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{75}x^3.$$

Ainsi, on a, aux infiniment petits du troisième ordre près,

$$\text{arc AOC} = \frac{2c}{3}\left(13 - \frac{100c^2}{10c^2 + 2f^2}\right) = \frac{2c}{3}\left(13 - \frac{100}{10 + 2\theta^2}\right).$$

(Voir la note II.)

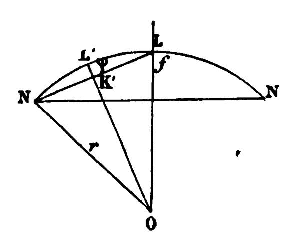
4. — En posant $1 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{15}x^2 + \ldots = A + B\sqrt{1 + Cx}$ on trouvera, de même, la formule nouvelle

$$\text{arc ABC} = \frac{\sqrt{100c^2 + 80f^2} - 4c}{3} = c\,\frac{\sqrt{100 + 80\theta^2} - 4}{3},$$

très commode, si l'on se sert d'une table de racines carrées.

Ces deux dernières formules sont très approchées.

5. — On peut trouver une autre formule approchée en se basant sur le lemme qui suit :



Considérons un arc quelconque N'LN (fig. 2), *sa moitié*, LN', *son quart* L'N, *son huitième*, ...; *le rapport de chaque flèche à celle de l'arc précédent tend vers la limite* $\frac{1}{4}$.

Appelons f et φ les deux flèches LK, L'K'; nous aurons

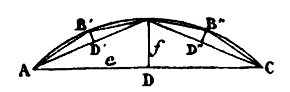
(α) $\quad \overline{NK}^2 = f(2r - f) \quad$ et $\quad \overline{NK'}^2 = \varphi(2r - \varphi)$;

or $f^2 = (2.K'N)^2 - \overline{NK}^2$. Remplaçant, dans cette égalité, NK et K'N par les valeurs tirées de (α), on trouve, après quelques transformations:

$$(\beta) \qquad f = 4\varphi\left(1 - \frac{\varphi}{2r}\right),$$

d'où sensiblement, si φ est très petit relativement à r, $f = 4\varphi$.

6. — Maintenant, étant données la corde AC et la flèche DB (*fig. 3*), tirons AB, CB; puis, aux milieux D', D", élevons des perpendiculaires D'B', D"B" égales chacune au quart de BD; élevons de même, aux milieux de AB', B'B, BB", B"C, des perpendiculaires égales chacune au quart de D'B'; et ainsi de suite : nous forme-



rons un polygone dont le développement sera sensiblement égal à celui de l'arc circulaire ayant même corde et même flèche.

Cherchons donc le développement du polygone P_n de 2^n côtés ainsi formé. Nous appellerons $c, c_1, c_2, c_3, \dots, f, f_1, f_2, f_3, \dots$ les cordes et les flèches successives.

On a

$$(c_2)^2 = \left(\frac{c_1}{2}\right)^2 + f_1^2 = \frac{c^2 + f^2}{4} + \frac{f^2}{4^2}, \quad f_2 = \frac{f_1}{4} = \frac{f}{4^2},$$

$$(c_3)^2 = \left(\frac{c_2}{2}\right)^2 + f_2^2 = \frac{c^2}{4^2} + \frac{f^2}{4^2} + \frac{f^2}{4^3} + \frac{f^4}{4^3} \quad \text{et} \quad f_3 = \frac{f_2}{4} = \frac{f}{4^3},$$

$$(c_4)^2 = \left(\frac{c_3}{2}\right)^2 + f_3^2 = \frac{c^2}{4^3} + \frac{f^2}{4^3} + \frac{f^2}{4^4} + \frac{f^2}{4^5} + \frac{f^2}{4^6} \quad \text{et} \quad f_4 = \frac{f}{4^4}.$$

En général, et il serait facile de le démontrer par la méthode de proche en proche;

$$(c_n)^2 = \frac{c^2}{4^{n-1}} + \frac{f^2}{4^{n-1}} + \frac{f^2}{4^{n+1}} + \dots + \frac{f^2}{4^{2n-2}} (\alpha), \quad f_n = \frac{f}{4^n}.$$

Or, la suite $1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}$, qui multiplie $\frac{f^2}{4^{n-1}}$, est égale à $\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$.

On aura donc $\quad c_n^2 = \frac{1}{4^{n-1}}\left[c^2 + \frac{4}{3} f^2\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)\right],$

$$P_n^2 = 2^{2n} c_n^2 = 4\left[c^2 + \frac{4}{3} f^2\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)\right];$$

et, à la limite, $\quad P_\infty^2 = 4\left(c^2 + \frac{4}{3} f^2\right).$

On a donc, avec une erreur, d'autant moindre que le rapport $\frac{\varphi}{r}$ est plus petit,

$$\text{arc ABC} = P_\infty = 2c\sqrt{1 + \frac{4}{3}\theta^2}.$$

M. Tchebycheff *(Congrès de La Rochelle, 1882)*, a trouvé cette formule pour la rectification approximative d'une courbe quelconque qui a $2c$ pour corde et f pour flèche au milieu, le rapport $\frac{f}{c}$ étant très petit. *(A suivre)*

Voir la note III (*).

(*) Cette note sera publiée à la fin de l'article.

EXERCICE ÉCRIT (*)

70. — D'un point quelconque A d'une ellipse donnée, de centre O, on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre OB, conjugué de OA, et l'on prend, sur cette perpendiculaire, deux longueurs AA′, AA″ égales à OB. De même, de B on abaisse une perpendiculaire sur OA, et l'on prend, sur cette perpendiculaire, deux longueurs BB′, BB″ égales à OA.

On sait que les points A″ et B″ sont sur la circonférence concentrique à l'ellipse, de rayon $(a+b)$, et que les points A′ et B′ sont sur la circonférence concentrique à l'ellipse, de rayon $(a-b)$.

Démontrer les propriétés suivantes :

1° Si φ désigne l'angle d'anomalie excentrique en A, les droites A′B′ et A″B″ sont inclinées, sur le grand axe, du même angle $(45^\circ - \varphi)$;

2° Les droites A′B″, B′A″ se coupent à angle droit et ont des longueurs égales ;

3° Le lieu du point de rencontre des droites A′B′, A″B″ est une kreuzcurve.

4° Le lieu du point de rencontre des droites A′B″, B′A″ est une courbe du sixième ordre, laquelle est une podaire du centre d'une développée d'ellipse.

5° Le point de rencontre de AB et, A′B′, et celui de AB et, A″B″, ont chacun pour lieu, une kreuzcurve.

6° Les points milieux de A″B′, A′B″ ont chacun pour lieu, une ellipse;

7° Si l'on prend A_1' symétrique de A′, par rapport au grand axe, la droite $A_1'B'$ coupe les axes à 45° ;

8° Le centre des moyennes distances des quatre points A′, B′, A″, B″ coïncide avec le point de contact de la corde AB et de l'enveloppe de cette corde. *(E. N. Barisien.)*

(*) Nous avons reçu de M. Barisien une solution de l'exercice 69. Elle nous est arrivée trop tard pour être insérée dans ce numéro ; elle paraîtra dans le numéro prochain.

PÉCIAL

assant par le point
point pris sur Δ;
upe le côté AB en

l'on ait :

on montrera que
rmant que la cons-

int M pour que
dans un rapport

par un maximum
nte.
n suppose le point

plan incliné AB, de
rde CDN, inexten-

C M α A P

ans vitesse, au som-

2° A ce moment, on place sur le corps M une surcharge de poids $p = Q$, et l'on fait agir sur le treuil un frein qui produit un moment résistant μ. Le corps M commence à redescendre vers le point A.

Calculer μ de telle sorte que le corps M arrive sans vitesse en bas du plan incliné.

On négligera toutes les résistances passives, ainsi que les dimensions du corps M et du poids Q. On admettra que la corde ne peut pas glisser sur le treuil et que, pendant que le poids Q demeure immobile au fond du puits, elle reste tendue entre le treuil et le corps M, cette portion CD de corde étant d'ailleurs toujours parallèle au plan incliné. On remarquera qu'à une certaine époque de la descente du corps M la corde tout entière se trouve brusquement tendue et qu'il se produit un choc.

On indiquera comment les résultats trouvés devraient être modifiés s l'on tenait compte de l'inertie du treuil, son poids étant représenté par 2P'.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1893

Solution par M. Balitrand, ancien élève de l'École Polytechnique.

On donne une conique S *et un triangle conjugué* ABC.

1° Démontrer que, par un point quelconque P, *de* S, *passent quatre coniques circonscrites à* ABC *et touchant* S *chacune en un point autre que* P.

2° Les points où ces quatre coniques touchent S *sont situés sur une conique* S *circonscrite à* ABC.

3° Quand P *décrit* S, S *enveloppe une courbe* T *du quatrième ordre.*

4° D'un point M *de la courbe* T, *on peut mener à cette courbe quatre tangentes, autres que celle qui touche la courbe en* M. *Démontrer que les points de contact sont sur une droite* D; *trouver l'enveloppe de* D, *quand le point* M *décrit la courbe* T.

Prenons le triangle ABC pour triangle de référence et soit

(1) $$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

l'équation de la conique conjuguée. On peut représenter les coordonnées d'un point de cette conique par les formules

(2) $$x = 2t, \qquad y = 1 - t^2, \qquad z = 1 + t^2.$$

Soit

(3) $$\lambda yz + \mu yx + \nu xy = 0,$$

l'équation d'une conique circonscrito à ABC. Les paramètres

des points d'intersection des coniques (1) et (3) sont donnés par l'équation

(4) $$\lambda t^4 - 2(\mu - \nu)t^3 - 2(\mu + \nu)t - \lambda = 0.$$

Ils sont liés par les égalités

(5) $$t_1 t_2 t_3 t_4 = -1, \qquad \sum t_1 t_2 = 0.$$

Faisons, dans ces relations $t_3 = t_4 = \theta$, et éliminons t_2; nous obtiendrons une équation en θ qui nous donnera les paramètres des points de tangence des coniques passant en $P(t_1)$. On obtient ainsi

(6) $$\theta^4 + 2t_1\theta^3 - \frac{2}{t_1}\theta - 1 = 0.$$

Cette équation étant du quatrième degré, il existe quatre coniques S passant en P et touchant la conique (1) en un point autre que P. Comme on a les relations

$$\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 = -1,$$
$$\sum \theta_1\theta_2 = 0,$$

les points de tangence sont situés sur une conique circonscrite à ABC.

En identifiant les équations (4) et (6), on a

$$\frac{\mu - \nu}{\lambda} = -t_1,$$
$$\frac{\mu + \nu}{\lambda} = \frac{1}{t_1},$$

d'où $$\lambda = t_1, \qquad \mu = \frac{1 - t_1^2}{2}, \qquad \nu = \frac{1 + t_1^2}{2};$$

et l'équation de la conique passant par les points de contact est

$$t_1 yz + \frac{1 - t_1^2}{2} zx + \frac{1 + t_1^2}{2} xy,$$

ou $$t_1^2(xy - zx) + 2t_1 yz + xy + zx.$$

Cette conique enveloppe, quand t_1 varie, la courbe qui a pour équation

$$y^2z^2 + z^2x^2 - x^2y^2 = 0,$$

ou

(7) $$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} = 0.$$

On peut donc représenter les coordonnées d'un point de

cette quartique par les formules

$$x = \frac{1}{2t}, \qquad y = \frac{1}{1 - t^2}, \qquad z = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Prenons une droite dont l'équation soit

$$ux + vy + wz = 0.$$

Elle coupe la quartique (7) en quatre points dont les paramètres sont donnés par la relation

$$(8) \qquad ut^4 - 2(v - w)t^3 - 2(v + w)t - u = 0$$

qui sont liés par les conditions

$$t_1t_2t_3t_4 = -1,$$

$$\sum t_1t_2 = 0.$$

Faisons $t_3 = t_4 = \theta$ dans ces relations, et éliminons t_2; nous obtenons l'équation

$$(9) \qquad \theta^4 + 2t_1\theta^3 - \frac{2}{t_1}\theta - 1 = 0,$$

qui donne les paramètres des points de contact des tangentes issues du point (t_1).

Les équations (8) et (9) sont identiques si l'on prend

$$u = t_1, \qquad v = \frac{1 - t_1^2}{2}, \qquad w = \frac{1 + t_1^2}{2}.$$

Par suite, les points de contact sont situés sur la droite qui a pour équation

$$2t_1x + (1 - t_1^2)y + (1 + t_1^2)z = 0,$$

ou

$$t_1^2(z - y) + 2t_1x + z + y = 0,$$

laquelle, lorsque le paramètre t_1 varie, enveloppe la conique représentée par

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

c'est-à-dire la conique initiale.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 15740-7-93.

NOTE SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS
DE LA PARABOLE ET DE SA DÉVELOPPÉE
OBTENUES EN CONSIDÉRANT CES COURBES COMME UNICURSALES

Par M. **E.-N. Barisien,** ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite* et *fin*, voir page 169.)

Application aux trois normales à la parabole issues d'un même point,

Si nous considérons les trois normales issues d'un point, de coordonnées α, β, il en résulte la propriété suivante :

Si, d'un point, on mène trois tangentes à la développée de la parabole, ces trois tangentes rencontrent la développée en trois autres points. Les tangentes en ces points sont concourantes.

En effet, l'équation des coefficients angulaires des normales issues de (α, β) est

$$pm^3 - 2(\alpha - p)m + 2\beta = 0.$$

En changeant m en $-\frac{m}{2}$ et α, β en α', β', on aura l'équation

$$pm^3 - 8(\alpha' - p)m - 16\beta' = 0,$$

qui représente l'équation aux coefficients angulaires des trois tangentes à la développée, aux seconds points de rencontre des normales avec la développée. Or, on peut identifier cette équation avec la première, en posant

$$\alpha - p = 4(\alpha' - p),$$
$$\beta = -8\beta'.$$

D'où il résulte que ces secondes tangentes sont des normales à la parabole, issues du point dont les coordonnées α', β' sont

$$\frac{\alpha + 3p}{4}, \quad -\frac{\beta}{8}.$$

Aire du triangle formé par les pieds des premières normales. — Si l'on désigne par m_1, m_2, m_3 les coefficients angulaires de ces trois normales et par S l'aire du triangle, on a

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{pm_1^2}{2} & -pm_1 & 1 \\ \frac{pm_2^2}{2} & -pm_2 & 1 \\ \frac{pm_3^2}{2} & -pm_3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{p^2}{2}\begin{vmatrix} m_1^2 & m_1 & 1 \\ m_2^2 & m_2 & 1 \\ m_3^2 & m_3 & 1 \end{vmatrix} = p^2\Delta.$$

Aire S′ du triangle formé par les pieds des secondes normales.— En changeant, dans les formules précédentes, m en $-\frac{m}{2}$, on trouve $16S' = p^2\Delta$; on a donc : $8S' = S$.

Aire Σ du triangle formé par les points de contact des premières normales avec la développée

$$2\Sigma = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p+\frac{3pm_1^2}{2} & pm_1^3 & 1 \\ p+\frac{3pm_2^2}{2} & pm_2^3 & 1 \\ p+\frac{3pm_3^2}{2} & pm_3^3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3p^2}{2}\begin{vmatrix} m_1^2 & m_1^3 & 1 \\ m_2^2 & m_2^3 & 1 \\ m_3^2 & m_3^3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3p^2}{2}\Delta.$$

Aire Σ′ du triangle formé par les points de contact des secondes normales avec la développée.

On trouve $$2\Sigma' = \frac{3p^2}{2}\cdot\frac{1}{32}\Delta.$$

Donc . $$\Sigma = 32\Sigma'.$$

Nous allons encore donner d'autres applications de ces formules pour montrer combien elles permettent d'arriver facilement à certains résultats que l'on obtiendrait moins rapidement par d'autres procédés.

Nous nous proposons à cet effet, de rechercher les équations des cercles suivants :

1° *Du cercle C passant par les pieds des normales issues d'un même point.*

2° *Du cercle C_1 passant par les seconds points d'intersection des normales avec la parabole.*

3° *Du cercle C_2 passant par les centres de courbure correspondant aux pieds des premières normales.*

4° *Du cercle C_3 passant par les centres de courbure correspon-*

dant aux pieds des secondes normales. (Ces centres de courbure sont les seconds points d'intersection des premières normales avec la développée.)

I. — Cercle C.

L'équation de ce cercle qui passe par le sommet de la parabole est connue. Elle est

$$\text{(C)} \qquad x^2 + y^2 - (\alpha + p)x - \frac{\beta y}{2} = 0.$$

II. — Cercle C_1.

Le normale à l'un des trois points N_1, N_2, N_3 a pour coefficient angulaire

$$n = -\frac{y'}{p} = -\left(\frac{m^2 + 2}{m}\right).$$

En éliminant m entre les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} pm^3 - 2(\alpha - p)m + 2\beta = 0, \\ m^2 + mn + 2 = 0; \end{array} \right.$$

on aura l'équation aux coefficients angulaires des normales en N_1, N_2, N_3. Or, ce système se ramène au suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} pm^2n + 2\alpha m - 2\beta = 0, \\ m^2 + mn + 2 = 0. \end{array} \right.$$

L'élimination de m donne

$$2(pn + \beta)^2 = (pn^2 - 2\alpha)(\beta n + 2\alpha),$$

ou

$$(10) \quad p\beta n^3 + 2p(\alpha - p)n^2 - 2\beta(\alpha + 2p)n - 2(2\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Cherchons maintenant l'intersection de la parabole dont les coordonnées sont :

$$x = \frac{pn^2}{2}, \qquad y = pn,$$

avec un cercle ayant pour équation

$$x^2 + y^2 - 2\,Ax - 2By + C = 0.$$

On trouve

$$(11) \qquad p^2n^4 + 4p(p - A)n^2 + 8Bpn + 4C = 0.$$

On détermine A, B, C en exprimant que cette équation (11) a, parmi ses racines les trois racines de (10). Pour cela, il faut identifier (11) avec

$$[p\beta n^3 + 2p(\alpha - p)n^2 - 2\beta(\alpha + 2p)n - 2(2\alpha^2 + \beta^2)][n - \omega] = 0,$$

et l'on a $\qquad \omega\beta = 2(\alpha - p),$

$$\frac{p}{\beta}=\frac{2p(p-A)}{-\beta(\alpha+2p)-p\omega(\alpha-p)}=\frac{4Bp}{\beta\omega(\alpha+2p)-(2\alpha^2+\beta^2)}=\frac{2C}{\omega(2\alpha^2+\beta^2)};$$

d'où l'on déduit

$$\omega=\frac{2(\alpha-p)}{\beta},$$

$$A=\frac{\beta^2(\alpha+4p)+2p(\alpha-p)^2}{2\beta^2},$$

$$B=\frac{2\alpha p-\beta^2-4p^2}{4\beta},$$

$$C=\frac{p(\alpha-p)(2\alpha^2+\beta^2)}{\beta^2}.$$

De sorte que l'équation du cercle (C_1) est

$$(C_1)\quad\left\{\begin{aligned}&x^2+y^2-\frac{[\beta^2(\alpha+4p)+2p(\alpha-p)^2]}{\beta^2}x-\frac{[2\alpha p-\beta^2-4p^2]}{4\beta}y\\&+\frac{p(\alpha-p)(2\alpha^2+\beta^2)}{\beta^2}=0.\end{aligned}\right.$$

III. — Cercle C_2.

Nous emploierons un procédé analogue à celui qui nous a permis de déterminer l'équation du cercle C_1.

En cherchant l'intersection du cercle correspondant à l'équation

$$x^2+y^2-2Mx-2Ny+Q=0,$$

avec la développée représentée par les équations unicursales

$$x=p+\frac{3pt^2}{2}\qquad y=pt^3,$$

on trouve

$$(12)\quad p^2t^6+\frac{9p^2}{4}t^4-2Npt^3+3p(p-M)t^2+Q-2Mp+p^2=0.$$

Or les centres de courbure C_1, C_2, C_3 correspondent à des valeurs de t racines de l'équation

$$pm^3-2(\alpha-p)m+2\beta=0,$$

de sorte que l'on doit identifier l'équation (12) avec la suivante :

$$(13)\quad [pt^3-2(\alpha-p)t+2\beta][pt^3+Rt^2+St+H]=0;$$

ce qui permettra de déterminer R, S, T, M, N et Q.

On trouve ainsi les six équations :

$$R=0,$$

$$\begin{aligned} -2(\alpha - p) + S &= \frac{9p}{4}, \\ 2\beta p - 2R(\alpha - p) + pH &= -2Np, \\ 2R\beta - 2S(\alpha - p) &= 3p(p - M), \\ \beta S - H(\alpha - p) &= 0, \\ 2\beta H &= Q - 2Mp + p^2; \end{aligned}$$

qui donnent

$$R = 0, \qquad S = \frac{8\alpha + p}{4}, \qquad H = \frac{\beta(8\alpha + p)}{4(\alpha - p)},$$

$$M = p + \frac{(\alpha - p)(8\alpha + p)}{6p}, \qquad N = -\frac{\beta(16\alpha - 7p)}{8(\alpha - p)},$$

$$Q = \frac{\beta^2(8\alpha + p)}{2(\alpha - p)} + p^2 + \frac{(\alpha - p)(8\alpha + p)}{3}.$$

De sorte que l'équation du cercle C_2 peut s'écrire

$$(C_2) \left\{ \begin{aligned} & x^2 + y^2 - \left[2p + \frac{(\alpha - p)(8\alpha + p)}{3p}\right] x + \frac{\beta(16\alpha - 7p)}{4(\alpha - p)} y \\ & + \frac{\beta^2(8\alpha + p)}{2(\alpha - p)} + p^2 + \frac{(\alpha - p)(8\alpha + p)}{3} = 0. \end{aligned} \right.$$

Remarque. — La seconde parenthèse de (13), égalée à zéro, donne

$$pt^3 + \frac{(8\alpha + p)}{4} t + \frac{\beta(8\alpha + p)}{4(\alpha - p)} = 0.$$

Or, cette équation n'ayant pas de terme en t^2 peut être identifiée avec l'équation

$$pt^3 - 2(\alpha_0 - p)t + 2\beta_0 = 0$$

des coefficients angulaires des normales issues du point (α_0, β_0). On a, en effet :

$$\left\{ \alpha_0 = \frac{7p - 8\alpha}{8}, \qquad \beta_0 = \frac{\beta(8\alpha + p)}{8(\alpha - p)}. \right.$$

Ainsi les trois normales aux trois autres points de rencontre du cercle C_2 avec la développée, se coupent en un même point (α_0, β_0). Il convient de remarquer qu'un seul de ces points d'intersection est réel : les deux autres sont imaginaires.

IV. — Cercle C_3.

On change, dans l'équation C_2, α et β en α' et β', c'est-à-dire α en $\frac{\alpha + 3p}{4}$, β en $-\frac{\beta}{8}$. On obtient ainsi

$$(C_3)\left\{\begin{aligned} & x^2 + y^2 - \left[2p + \frac{(\alpha - p)(2\alpha + 7p)}{12p}\right]x - \frac{\beta(4\alpha+5p)}{8(\alpha-p)}y \\ & + \frac{\beta^2(2\alpha + 7p)}{64(\alpha - p)} + p^2 + \frac{(\alpha - p)(2\alpha + 7p)}{12} = 0. \end{aligned}\right.$$

Conséquences. — 1° On obtiendrait l'équation des cercles C, C_1, et C_3, correspondant aux secondes normales, en changeant α et β en α' et β'.

2° On peut observer que les coefficients de x dans (C) (C_2) et (C_3) sont indépendants de β; par conséquent, si le point (α, β) se déplace sur une droite perpendiculaire à l'axe de la parabole les centres de (C), (C_2), (C_3) se déplacent aussi sur des perpendiculaires à l'axe.

3° On voit ainsi que les centres de (C) et (C_1) auront même ordonnée si le point (α, β) se déplace sur la parabole représentée par $$3\beta^2 - 2\alpha p + 4p^2 = 0.$$

Remarque. — On peut ajouter qu'il est très facile d'étudier, avec la forme unicursale de l'équation de la parabole, les deux questions suivantes :

Rayon de courbure des développées successives de la parabole.

Podaires successives de la parabole par rapport à un point quelconque.

CALCUL D'UN SEGMENT CIRCULAIRE
DONT ON CONNAIT LA CORDE ET LA FLÈCHE

Par M. **A. Aubry.**

(*Suite* et *fin*, voir p. 184.)

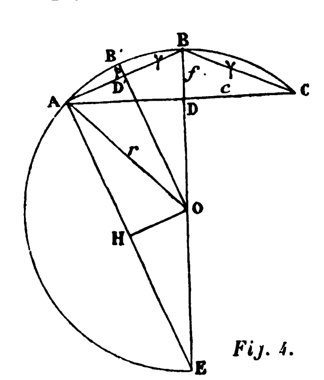


Fig. 4.

7. — Appelons $2c$, γ, f, φ, r et $2a$ les cordes AC, AB, les flèches BD, B'D', le rayon OC et l'arc ABC (*fig. 4*). Si l'arc est suffisamment petit, on peut, sans grande erreur, prendre pour la surface du segment AB celle du segment de parabole de même corde et de même flèche. Nous poserons donc

$$ra = \text{sect. OAC} = 2 \text{ tri. AOB} + 2 \text{ seg. AB'B} = rc + \frac{4}{3}\gamma\varphi;$$

d'où, comme $\varphi = r - \frac{1}{2}\text{AE}$:

$$ra = rc + \frac{4}{3}\gamma r - \frac{2}{3}\gamma.\text{AE}.$$

Remplaçons $\gamma.\text{AE}$ par la quantité $2rc$ qui représente même le double de la surface du triangle BAE, et réduisons, il viendra très approximativement

$$a = \frac{4\gamma - c}{3}, \quad \text{ou} \quad \text{arc ABC} = \frac{8\gamma - 2c}{3}.$$

Cette formule est due à Huyghens (*De circuli magnitudine inventa*, Leyde 1654) qui en a tiré la conclusion graphique suivante :

B
A D X H C
Fig. 5.

Rabattre AB *en* AH (fig. 5) *et prendre* $\text{DX} = \frac{1}{3}\text{DH}$: AX *est sensiblement équivalent à l'arc* AB.

8. — Dans l'ouvrage intitulé *Cyclometricus* (Leyde, 1621), Snellius a énoncé le théorème suivant, démontré pour la première fois par Huyghens *(loco cit)*.

Considérons l'arc AM (fig. 6) *plus petit qu'un quart de circonférence, prolongeons le diamètre* AOB *d'une longueur* BI *égale au rayon, la droite* IM *coupe la tangente au point* A *en un point* K *tel, que* KA *est sensiblement égal à l'arc* AM, *par défaut* (*) (voir la note IV).

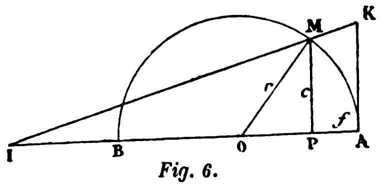


Fig. 6.

D'après les notations données plus haut, cela revient à poser

$$\text{(8)} \qquad \text{arc ABC} = c\,\frac{1 + \theta^2}{1 + \dfrac{\theta^2}{3}}.$$

9. — Parmi les nombreuses formules qu'on pourrait trouver pour le même objet, nous nous contenterons de mentionner la suivante

(*) Nous donnerons les démonstrations originales de tous ces théorèmes dans une rapide revue, que nous espérons publier prochainement, des trois fameux problèmes de la *quadrature du cercle*, de la *multiplication du cube* et de la *trisection de l'angle*.

(9) $$\text{arc ABC} = c\left(4 - \frac{c}{f}\sin 2\theta\right)$$

facile à appliquer en se servant d'une table de sinus naturels.

10. — Le meilleur moyen de classer ces différentes formules par degré d'approximation et d'apprécier la valeur de chacune est de les réduire en série; on trouve ainsi, en opérant ce classement :

(2) $$2c\left(1 + \frac{2}{3}\theta^2\right)$$

(6) $$2c\left(1 + \frac{2}{3}\theta^2 - \frac{2}{9}\theta^4 + \frac{4}{27}\theta^6 - \ldots\right)$$

(8) $$2c\left(1 + \frac{2}{3}\theta^2 - \frac{2}{9}\theta^4 + \frac{2}{27}\theta^6 - \ldots\right)$$

(7) $$2c\left(1 + \frac{2}{3}\theta^2 - \frac{1}{6}\theta^4 + \ldots\right)$$

(3) $$2c\left(1 + \frac{2}{3}\theta^2 - \frac{5}{36}\theta^4\right)$$

(9) $$2c\left(1 + \frac{2}{3}\theta^2 - \frac{2}{15}\theta^4 + \frac{2}{315}\theta^6 - \ldots\right)$$

(4) $$2c\left(1 + \frac{2}{3}\theta^2 - \frac{2}{15}\theta^4 + \frac{2}{75}\theta^6 - \ldots\right)$$

(5) $$2c\left(1 + \frac{2}{3}\theta^2 - \frac{2}{15}\theta^4 + \frac{4}{25}\theta^6 - \ldots\right)$$

(1) $$2c\left(1 + \frac{2}{3}\theta^2 - \frac{2}{15}\theta^4 + \frac{2}{35}\theta^6 - \ldots\right)$$

La formule (5) est donc, de beaucoup, la plus approchée.

II. — Quadrature du segment.

11. — On a : seg ABC $= ra - (r - f)c$.
d'où, à cause de (β) et de (1), (nº 1)

(1) $$\text{seg ABC} = 4fc\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1.3.5}\theta^2 - \frac{1}{3.5.7}\theta^4 + \frac{1}{5.7.9}\theta^6\ldots\right)$$

Cette formule, traitée comme aux nos 1, 2, 3, 4, donnera, pour l'expression du segment, les expressions suivantes, de plus en plus approchées :

(2) $$\frac{4}{3}fc\left(1 + \frac{1}{5}.\theta^2\right)$$

(3) $$\frac{4}{3} fc(1 + 0{,}3.\theta^2)(1 - 0{,}1.\theta^2)$$

(4) $$\frac{4}{15} fc\left(12 - \frac{49c^2}{7f^2 + c^2}\right)$$

(5) $$\frac{2}{15} fc\left(3 + \sqrt{49 + 28.\theta^2}\right)$$

Ces expressions sont beaucoup plus exactes que leurs correspondantes du § **1**. Ainsi pour l'arc de 60°, les formules (**2**) et (**3**) donnent l'aire du segment, avec des erreurs relatives qui sont, respectivement, 0,0000135 et 0,0000055.

Note I. — Sur la formule $S = 2c(1 + \frac{2}{3}\theta^2)$.

12. — On trouve de même la formule (**2**) en cherchant une expression approchée de l'arc de la parabole ayant même corde et même flèche.

En effet de $y^2 = 2px$, on tire, successivement :

$$dy = \frac{p}{y}dx, \quad dy^2 = \frac{p}{2x}dx^2, \quad ds = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,dx;$$

d'où, si x est assez petit comparativement à p,

$$ds = \sqrt{1 + \frac{p}{2x} + \frac{2p}{x}}\,dx = \left(\sqrt{\frac{p}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2p}}x^{\frac{1}{2}}\right)dx.$$

Intégrant de zéro à x, il vient

$$s = \sqrt{2px} + \frac{2}{3}\frac{x^2}{\sqrt{2px}} = y\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{y^2}\right).$$

13. — *Autrement :* On a

(α) $$dx^2 = \frac{2x}{p}dy^2 \quad \text{d'où} \quad ds = \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}\,dy;$$

ou, approximativement :

$$ds = \left(1 + \frac{y^2}{2p^2}\right)dy.$$

Ainsi, $$s = \int_0^y dy + \int_0^y \frac{y^2}{2p}dy = y + \frac{y^3}{6p^2} = y + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{y},$$

comme plus haut.

D'ailleurs, en développant (α), on trouve

$$ds = \left(1 + \frac{y^2}{2p^2} - \frac{y^4}{8p^4} + \frac{y^6}{16p^6} - \ldots\right)dy;$$

d'où, exactement,

$$\text{arc} = y + \frac{y^3}{6p^2} - \frac{y^5}{40p^4} + \frac{y^7}{112p^6} - \dots,$$

ce qui donne, à cause de $p = \frac{y^2}{2x}$:

$$\text{arc} = y\left(1 + \frac{2}{3}\frac{x^2}{y^2} - \frac{2}{5}\frac{x^4}{y^4} + \frac{4}{7}\frac{x^6}{y^6} - \dots\right)$$

formule valable seulement pour $y < p$, ou $2x < y$, puisqu'autrement le radical de (α) ne serait pas développable par la formule du binôme.

La formule $s = 2c\left(1 + \frac{2}{3}\theta^2\right)$ n'est pas nouvelle : elle est utilisée pour l'étude des ponts suspendus.

Note II. — Sur la formule $s = \frac{2c}{3}\left(13 - \frac{100}{10 + 2\theta^2}\right)$.

14. — Cette formule peut être considérée comme l'interprétation analytique de la construction suivante, due à Newton *(Lettre à Oldenbourg, 1676.)*

Soit l'arc AM (fig. 6), *plus petit qu'un quadrant; menons le diamètre* AB *et prenons, sur la tangente en* A, *la longueur* AK *égale à l'arc* AM : *la droite* KM *coupe* AB *en un point* I; IA *est très sensiblement égal à* $3.\text{OA} - \frac{1}{5}\text{AP}$.

Nous laissons tout cela à démontrer.

Newton ajoute une rectification très approchée d'un petit arc d'ellipse, rectification qu'on peut traduire analytiquement ainsi :

Soit l'arc AM (fig. 7) *commençant à l'un des sommets* A; *appelons* x *et* y *la flèche* AP *et la demi-corde* MP *et posons*

$$(1) \qquad \alpha = 10\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{a}{x} - 0{,}7\right);$$

on aura, très sensiblement,

$$(2) \qquad \text{arc AM} = y + \frac{10y}{3(\alpha + 3)}.$$

Fig. 7.

Dans l'égalité (1) b et a désignent les demi-axes, respectivement parallèles à MP et à AP.

Note III. — Sur le polygone-limite P_∞.

15. — Ce polygone-limite est-il une courbe continue? C'est peu probable, mais pour l'assurer il faudrait pouvoir en donner une définition conduisant à une équation, ce qui ne paraît pas possible. On aurait tort d'écrire

$$s = \int_0^f \sqrt{1 + y'^2}dx = 2c\sqrt{1 + \frac{4}{3}\theta^2}:$$

ce serait un cercle vicieux. Cette courbe est certainement continue au sens géométrique — ou physique si l'on veut — du mot; mais au sens analytique, il nous paraît hors de doute qu'elle est infiniment discontinue ou pointillée.

Peut-on lui mener une tangente? La réponse dépend de celle qu'on fera aux difficultés qu'on vient de signaler.

Il est remarquable que cette pseudo-courbe (elle n'est, en effet, peut-être pas une courbe, mais l'ensemble d'une infinité de points qui ne sont liés par aucune loi fixe) est employée journellement pour de simples tracés de routes, aux raccordements des alignements droits. On se donne, d'après certaines conditions techniques les points de tangence A, C *(fig. 8)*, à égales distances du sommet S de l'angle des deux alignements; on joint S au milieu D de AC et l'on prend le milieu B de SD : c'est un des points de la courbe; on prend ensuite les points B', B", etc., comme il a été dit au n° 6, jusqu'à ce qu'on ait des points assez rapprochés.

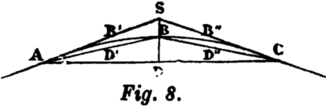


Fig. 8.

Note IV. — Sur les théorèmes de Snellius et de Newton.

16. — Snellius a déduit, de son théorème, le moyen suivant de calculer un angle déterminé par les trois côtés du triangle rectangle *a*, *b*, *c* rangés par ordre de grandeur.

Si le rapport $\frac{c}{a}$ *est assez petit, par exemple* $\leqslant \frac{1}{2}$, *l'angle* C *est donné, en degrés, par la valeur approximative* $\frac{172ac}{2a+b}$.

En effet, on a *(fig. 6)*

$$\text{arc AM} = \text{AK} = \frac{3.\text{OM}.\text{MP}}{2.\text{OM} + \text{OP}}.$$

Posant OM = 1 et observant que, dans ce cas l'arc de 1° est égal à 0.0174533o..., on trouve la formule annoncée. (Voir *Mathesis*, 1890 et 1891, *Sur la formule d'Ozanam.*)

On peut obtenir l'angle en minutes en faisant intervenir la longueur de l'arc d'une minute, laquelle est 0.00029687; on trouve ainsi, en minutes:

$$\text{angle AOM} = 10314 \frac{ac}{2a + b}.$$

Pour C = 30°, l'erreur n'est que de 15″. On peut donc employer ces formules jusqu'à $c = \frac{a}{2}$. Au delà, l'erreur serait trop forte : ainsi pour C = 45°, elle serait de 5′. On peut alors se servir de la méthode en fractionnant l'angle en deux parties et opérant sur chacune de ces parties. On pourrait aussi modifier la formule en supposant menée la bissectrice de l'angle C, ce qui donne

$$\frac{20618}{a+b} \frac{bc}{\sqrt{\frac{a+b}{2a} + 2}},$$

mais les calculs sont plus longs dans l'application.

17. — Traitant de la même manière la formule de Newton (n° 3), on trouve en minutes la formule

$$1146 \frac{14a + b}{3a + 2b} c,$$

laquelle donne pour 45° le nombre de minutes 2699′ 88 : elle peut donc servir dans tous les cas.

18. — On peut prendre aussi un angle en chaînant au pas : soit par exemple l'angle ASB (*fig. 9*). On prendra un même nombre de pas, par exemple 100 pas en SA et en SB, on chaînera AB et la médiane SC : on aura ainsi tous les éléments du calcul sans aucun instrument.

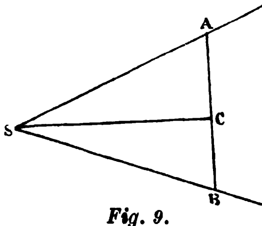


Fig. 9.

M. Ed. Collignon a donné (*Congrès de Blois*, 1884) un autre moyen pour le même objet; il est fondé sur un théorème de l'*Arithmetica universalis*, de Newton.

EXERCICE ÉCRIT

71. — On donne un cercle (C) et un point P dans son plan. Par le point P, on mène une corde quelconque AB. Les cercles décrits sur PA et PB comme diamètres ont respectivement avec le cercle (C) des axes radicaux (D) et (D′). Montrer que

1° L'enveloppe des droites (D) et (D′) est une conique;

2° Le lieu du point de rencontre des droites (D) et (D′) est une ligne droite;

3° Le lieu du point de rencontre des tangentes communes au cercle (C) et au cercle de diamètre AB est une cubique. — Si le point P est sur le cercle (C), la cubique devient une strophoïde droite. *(E.-N. Barisien.)*

Solution de l'exercice écrit 69 (*).

Si nous prenons pour axe de x l'axe de la strophoïde et pour axe des y la perpendiculaire à l'axe de symétrie menée par le point double, la strophoïde a pour équation

$$y = x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

En posant $y = tx$, on obtient

(*) Nous reproduisons l'énoncé de cet exercice :

69. — D'un point P pris sur une strophoïde droite, dont le point double est O, on mène les deux tangentes à la courbe dont les points de contact sont T et T′. L'axe de la strophoïde, la perpendiculaire Δ à l'axe, menée par O, et la droite OP rencontrent la corde TT′, respectivement aux points J, I et K. Montrer que :

1° les droites OP et TT′ sont également inclinées sur l'axe de la strophoïde.

2° le point I est le milieu de TT′.

3° le point K est le milieu de IJ.

4° si T_1 est le symétrique de T par rapport à l'axe de la strophoïde, les droites OT_1 et OT′ sont rectangulaires.

5° si P_1 est le symétrique de P par rapport à l'axe et si T″ est le troisième point d'intersection de la droite TT′ avec la strophoïde, les droites OT″ et OP_1 sont rectangulaires.

6° le milieu M de T″P est sur la perpendiculaire à l'axe menée par O.

(E.-N. Barisien.)

(1) $$x = \frac{a(t^2-1)}{t^2+1} \qquad y = \frac{at(t^2-1)}{t^2+1}.$$

L'équation de la tangente à la strophoïde, en un point de paramètre t, est

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}.$$

Or $$\frac{dx}{dt} = \frac{4at}{(t^2+1)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{a(t^4+4t^2-1)}{(t^2+1)^2}.$$

L'équation de la tangente devient donc

$$[X(t^2+1) - a(t^2-1)](t^4+4t^2-1) = 4t[Y(t^2+1) - at(t^2-1)]$$

ou en supprimant les facteurs (t^2+1),

(2) $$X(t^4+4t^2-1) - 4tY - a(t^2-1)^2 = 0.$$

Telle est l'équation de la tangente au point de paramètre t. Elle représente aussi l'équation du quatrième degré en t, donnant la valeur des paramètres des quatre tangentes issues d'un point (X, Y).

Dans le cas de l'énoncé, le point P d'émission des tangentes est sur la strophoïde.

Si donc, on appelle m le paramètre relatif au point P, on a

$$X = \frac{a(m^2-1)}{m^2+1} \qquad Y = \frac{am(m^2-1)}{m^2+1}.$$

En portant ces valeurs dans (2), on obtient l'équation du quatrième degré en t

$$t^4 - t^2(3m^2-1) + 2tm(m^2-1) + m^2 = 0.$$

Or, cette équation doit admettre deux fois la racine $t = m$, à cause de la tangente en P. Le premier membre de cette équation doit donc être divisible par $(t^2 - 2tm + m^2)$.

On trouve en effet le quotient

(3) $$t^2 + 2tm + 1 = 0.$$

Si donc t_1 et t_2 sont les paramètres relatifs aux points T, T', on a

(4) $$t_1 + t_2 = -2m.$$

(5) $$t_1 t_2 = 1.$$

Cherchons maintenant l'équation de la droite TT'. Cette équation est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a(t_1^2-1) & at_1(t_1^2-1) & t_1^2+1 \\ a(t_2^2-1) & at_2(t_2^2-1) & t_2^2+1 \end{vmatrix} = 0.$$

ou, en développant ce déterminant, et supprimant le facteur $(t_1 - t_2)$

$$x[t_1^2t_2^2 + 2t_1t_2 + t_1^2 + t_2^2 - 1] - 2y(t_1+t_2) - a[t_1^2t_2^2 - t_1^2 - t_2^2 + 1] = 0.$$

En tenant compte des relations (4) et (5), cette équation devient

(6) $$m^2x + my - a(1-m^2) = 0.$$

1° La droite OP a pour coefficient angulaire le paramètre m : la droite TT' a pour coefficient angulaire $-m$: donc les deux droites OP et TT' sont également inclinées sur l'axe de la strophoïde.

2° Si x_1 et x_2 sont les abscisses de T et T', on a

$$x_1 + x_2 = a\left(\frac{t_1^2-1}{t_1^2+1} + \frac{t_2^2-1}{t_2^2+1}\right) = \frac{2a(t_1^2t_2^2-1)}{(t_1^2+1)(t_2^2+1)}.$$

Or d'après (5), on a $\qquad x_1 = -x_2,$

ce qui montre que le point I est le milieu de TT'.

3° La droite OP a pour équation

$$(7) \qquad y - mx = 0.$$

En résolvant les deux équations (6) et (7), on trouve pour les coordonnées du point d'intersection K de OP et TT'

$$x = \frac{a(1-m^2)}{2m^2} \qquad y = \frac{a(1-m^2)}{2m}.$$

Or, d'après (6)

$$OJ = \frac{a(1-m^2)}{m^2} \qquad OI = \frac{a(1-m^2)}{m}.$$

Le point K est donc bien le milieu du segment IJ.

4° La relation (5) démontre immédiatement que les droites OT_1 et OT' sont rectangulaires.

5° Cherchons la valeur du paramètre t relative au troisième point d'intersection T'' de la droite TT' avec la strophoïde.

Pour y arriver, remplaçons dans (6) x et y en fonction de t, on obtient

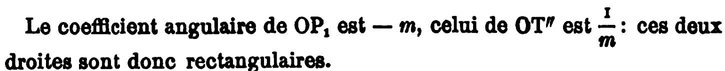
$$(8) \quad mt^3 + (2m^2 - 1)t^2 - mt - 1 = 0.$$

Cette équation donne les trois valeurs de t relatives aux points T, T', T''. L'équation (8) doit donc contenir en facteur le premier membre de l'équation (3). On peut écrire en effet l'équation (8) sous la forme

$$(t^2 + 2tm + 1)(tm - 1) = 0.$$

La valeur t_3 relative à T'' est donc

$$t_3 = \frac{1}{m}.$$


Le coefficient angulaire de OP_1 est $-m$, celui de OT'' est $\frac{1}{m}$: ces deux droites sont donc rectangulaires.

6° L'abscisse x_3 du point T'' a pour valeur

$$x_3 = \frac{a(t_3^2 - 1)}{t_3^2 + 1} = \frac{-a(m^2 - 1)}{m^2 + 1} = -X.$$

La droite T''P est donc divisée en deux parties égales par l'axe des y.

Notes sur l'exercice 70.

1° On sait que les droites OA' et OA'' sont toutes deux inclinées sur le grand axe de l'angle φ : de même OB' et OB'' sont inclinées sur le même axe, de l'angle $90° + \varphi$. Il en résulte que, dans le triangle B''OA'', l'angle en O est droit. Par suite, si T est le point de rencontre de B''A'' avec le grand axe, on a

$$\widehat{TB''O} = 45°, \qquad \widehat{B''OT} = 45° + \varphi.$$

Le troisième angle du triangle est donc

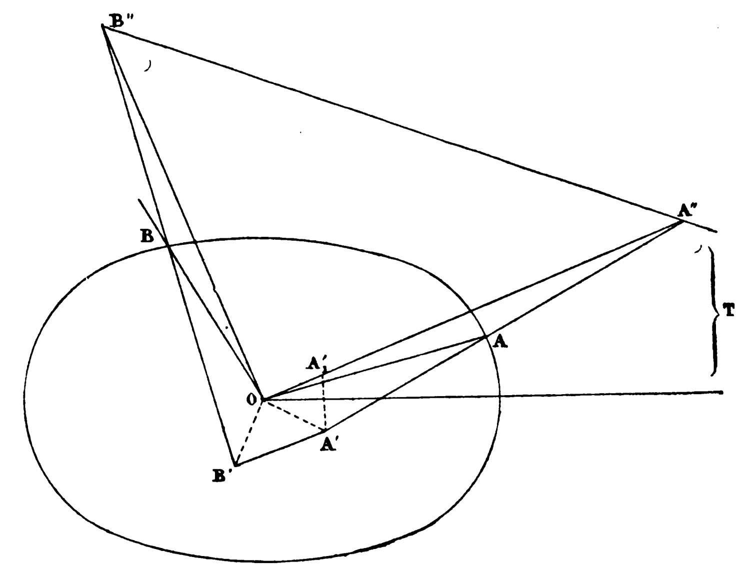
$$\widehat{B''TO} = 45° - \varphi.$$

On arrive encore au même résultat en cherchant les coordonnées des points A′, B′, A″, B″.

Ces coordonnées, ainsi que celles des points A et B, ont pour expressions :

$$\begin{cases} x_A = a\cos\varphi, \\ y_A = b\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_B = -a\sin\varphi, \\ y_B = b\cos\varphi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{A''} = (a+b)\cos\varphi \\ y_{A''} = (a+b)\sin\varphi \end{cases} \begin{cases} x_{A'} = (a-b)\cos\varphi \\ y_{A'} = -(a-b)\sin\varphi \end{cases} \begin{cases} x_{B''} = -(a+b)\sin\varphi \\ y_{B''} = (a+b)\cos\varphi \end{cases} \begin{cases} x_{B'} = -(a-b)\sin\varphi \\ y_{B'} = -(a-b)\cos\varphi \end{cases}$$



Or, les coefficients angulaires de A′B′ et A″B″ ont pour valeurs

$$\mu_{A'B'} = \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi} = \operatorname{tg}(45° - \varphi)$$

$$\mu_{A''B''} = \frac{\sin\varphi - \cos\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi} = -\operatorname{tg}(45° - \varphi)$$

On a donc $\mu_{A'B'} = -\mu_{A''B''} = \operatorname{tg}(45° - \varphi)$.

2° Les coefficients angulaires des droites A′B″ et B′A″ ont pour expressions

$$\mu_{A'B''} = \frac{-a(\sin\varphi + \cos\varphi) + b(\sin\varphi - \cos\varphi)}{a(\sin\varphi + \cos\varphi) + b(\sin\varphi - \cos\varphi)}$$

$$\mu_{A''B'} = \frac{a(\sin\varphi + \cos\varphi) + b(\sin\varphi - \cos\varphi)}{a(\sin\varphi + \cos\varphi) - b(\sin\varphi - \cos\varphi)}.$$

Donc $\mu_{A'B''} \times \mu_{A''B'} = -1.$

Les deux droites A′B″ et B′A″ sont rectangulaires.

De plus, si l'on considère les triangles A″OB′ et A′OB″, ils ont deux

côtés égaux :

$$OB' = OA' \qquad OA'' = OB''.$$

Les angles en O sont égaux :

$$\widehat{A''OB'} = \widehat{A'OB''} = 90° + 2\varphi.$$

Par conséquent, les troisièmes côtés A″B′, A′B″ sont égaux.

3° Les équations de A″B″ et A′B′ sont, respectivement :

$$(1) \qquad y(\sin\varphi + \cos\varphi) - x(\sin\varphi - \cos\varphi) = (a + b)$$

$$(2) \qquad y(\sin\varphi + \cos\varphi) + x(\sin\varphi - \cos\varphi) = -(a - b)$$

En ajoutant et retranchant, on trouve :

$$y(\sin\varphi + \cos\varphi) = b$$
$$x(\sin\varphi - \cos\varphi) = -a;$$

d'où

$$\sin\varphi + \cos\varphi = \frac{b}{y}$$
$$\sin\varphi - \cos\varphi = -\frac{a}{x}.$$

En élevant au carré et ajoutant ces deux dernières équations, φ s'élimine, et l'on obtient

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 2,$$

équation, d'une kreuzcurve.

4° Les droites A″B′ et A′B″ ont pour équations :

$$(3) \qquad y[(a+b)\cos\varphi + (a-b)\sin\varphi] - x[(a+b)\sin\varphi + (a-b)\cos\varphi] = -(a^2 - b^2)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$(4) \qquad y[(a-b)\cos\varphi + (a+b)\sin\varphi] + x[(a-b)\sin\varphi + (a+b)\cos\varphi] = (a^2 - b^2)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Il faut éliminer φ entre ces deux équations. Ajoutons (3) et (4) ; il vient

$$(bx - ay)\sin\varphi = (bx + ay)\cos\varphi.$$

Donc

$$\sin\varphi = \frac{bx + ay}{\sqrt{2(b^2x^2 + a^2y^2)}} \qquad \cos\varphi = \frac{bx - ay}{\sqrt{2(b^2x^2 + a^2y^2)}}.$$

En portant ces valeurs de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ dans (3), réduisant et faisant disparaître le radical, on trouve, pour l'équation du lieu du point de rencontre de A″B′ et A′B″ :

$$(5) \qquad 2(x^2 + y^2)^2(b^2x^2 + a^2y^2) = c^4 x^2y^2.$$

Cette courbe est la podaire du centre de la développée de l'ellipse ayant même centre et mêmes directions d'axes que l'ellipse donnée, mais dont les longueurs des demi-axes sont $\frac{a}{\sqrt{2}}$ et $\frac{b}{\sqrt{2}}$.

5° L'équation de la droite AB est

$$(6) \qquad ay(\sin\varphi + \cos\varphi) - bx(\sin\varphi - \cos\varphi) = ab.$$

On doit éliminer φ entre (2) et (6) pour avoir le lieu du point de rencontre de AB et A′B′. Or de (2) et (6), on déduit

$$\sin\varphi - \cos\varphi = -\frac{a^2}{(a+b)x}$$
$$\sin\varphi + \cos\varphi = \frac{b^2}{(a+b)y}.$$

En élevant au carré et ajoutant, on a

$$(7) \qquad \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} = 2(a + b)^2.$$

Le lieu est une kreuzcurve.

On trouverait de même, pour le lieu du point de rencontre de AB et

A″B″, la kreuzcurve correspondant à

(8) $$\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} = 2(a-b)^2.$$

6° Les coordonnées du milieu du segment A″B′ sont :

$$2x = (a+b)\cos\varphi - (a-b)\sin\varphi,$$
$$2y = (a+b)\sin\varphi - (a-b)\cos\varphi.$$

D'où l'on déduit

$$2ab\cos\varphi = (a+b)x + (a-b)y,$$
$$2ab\sin\varphi = (a-b)x + (a+b)y.$$

Élevons au carré et ajoutons; nous avons

(9) $$(a^2+b^2)(x^2+y^2) + 2c^2xy = 2a^2b^2.$$

Le lieu du milieu du segment A′B″ est représenté par

(10) $$(a^2+b^2)(x^2+y^2) - 2c^2xy = 2a^2b^2.$$

Ces équations représentent deux ellipses concentriques à l'ellipse donnée elles ont leurs axes dirigés suivant les bissectrices de cette ellipse et elles ont mêmes longueurs d'axes que l'ellipse donnée.

7° Les coordonnées du point A'_1 sont :

$$(a-b)\cos\varphi, \qquad (a-b)\sin\varphi.$$

Le coefficient angulaire de $B'A'_1$ est, par conséquent,

$$\frac{(a-b)(\sin\varphi+\cos\varphi)}{(a-b)(\sin\varphi+\cos\varphi)} = 1.$$

La droite $B'A'_1$ coupe donc les axes sous l'angle de 45°.

8° Les coordonnées X, Y du centre des moyennes distances des points A′, A″, B′, B″ sont :

$$4X = x_{A'} + x_{A''} + x_{B'} + x_{B''},$$
$$4Y = y_{A'} + y_{A''} + y_{B'} + y_{B''},$$

c'est-à-dire

(11) $$2X = a(\cos\varphi - \sin\varphi),$$
(12) $$2Y = b(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Pour avoir le point où la droite AB touche son enveloppe, il faut prendre la dérivée de l'équation (6) par rapport à φ, ce qui donne

(13) $$ay(\sin\varphi - \cos\varphi) + bx(\sin\varphi + \cos\varphi) = 0,$$

et résoudre (6) et (13) par rapport à x et à y. On a ainsi

$$x = \frac{a}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = \frac{b}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Il y a donc identité entre ce point et le point (X, Y) qui est le milieu de AB.

L'enveloppe de la droite AB est d'ailleurs l'ellipse

$$\frac{2X^2}{a^2} + \frac{2Y^2}{b^2} = 1.$$

Ce dernier résultat est connu.

Nota. — La solution précédente est due à M. Barisien, ainsi que celle de l'exercice 69.

Nous avons reçu, trop tard pour la publier, une solution de l'exercice 70, analogue à celle qu'on vient de lire, de M. Grolleau, répétiteur au lycée de Marseille.

AGRÉGATION

DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

(Section des sciences mathématiques).

(*Suite*, voir page 189).

Géométrie descriptive.

On donne un hyperboloïde de révolution, à une nappe, dont l'axe est vertical et dont les génératrices font un angle de 45° avec le plan horizontal. La ligne de terre étant le petit axe de la feuille, la projection horizontale de l'axe de l'hyperboloïde sera sur le grand axe de la feuille, à 8 centimètres en avant du plan vertical; la cote du centre sera 8 centimètres, et le rayon du cercle de gorge sera 4 centimètres.

On considère la génératrice de front F de l'hyperboloïde, dont la projection horizontale est en avant du centre et dont la trace horizontale est à gauche du grand axe de la feuille :

1° Démontrer que les normales à l'hyperboloïde en tous les points de F engendrent un paraboloïde hyperbolique. Déterminer les plans directeurs et le sommet de ce paraboloïde; — construire ses contours apparents en projection; — construire les projections de son intersection avec l'hyperboloïde; — expliquer les constructions faites pour obtenir les projections d'un point de l'intersection et de la tangente en ce point;

2° On fait tourner ce paraboloïde de 90° autour de la droite F; — construire ses contours apparents en projection dans sa nouvelle position et les projections de son intersection avec l'hyperboloïde; — expliquer les résultats obtenus.

QUESTION 333

Solution (*) et **Développements**, par Mme Ve F. Prime.

On a, identiquement,

$$(x^2 - 1)^n \frac{d^{n+1}(x^2 - 1)^n}{dx^{n+1}} = n(n + 1) \frac{d^{n-1}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}};$$

et

$$(x^2 - 1) \frac{d^{q+2}(x^2 - 1)^n}{dx^{q+2}} + 2x(q + 1 - n) \frac{d^{q+1}(x^2 - 1)^n}{dx^{q+1}}$$
$$= (2n - q)(q + 1) \frac{d^q(x^2 - 1)^n}{dx^q}.$$

(E. Catalan.)

1° On a : $\dfrac{d(x^2 - 1)}{dx} = 2.n.x.(x^2 - 1)^{n-1}$,

d'où en multipliant de part et d'autre par $(x^2 - 1)$:

$$(x^2 - 1).\frac{d(x^2 - 1)^n}{dc} = 2nx(x^2 - 1)^n.$$

(*) M. Chochard, instituteur à Sonvillier (Jura Bernois), nous a adressé une autre solution de cette question.

Prenons les dérivées d'ordre de n :

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)\frac{d(x^2-1)^n}{dx}\right] = (x^2-1)\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}$$
$$+ 2nx\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + n(n-1)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}},$$

et

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[2nx(x^2-1)^n\right] = 2nx\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + 2n^2\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}},$$

d'où en égalant et en observant que

$$2n^2 - (n-1)n = n(n+1),$$

etc...

2° On sait que

$$(x^2-1).\frac{d^{n+2}(n^2-1)^n}{dx^{n+2}} + 2x\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}} = n(n+1)\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \; (*).$$

Prenons les dérivées d'ordre $q - n$:

$$(x^2-1).\frac{d^{q+2}(x^2-1)^n}{dx^{q+2}} + 2(q-n)x\frac{d^{q+1}(x^2-1)^n}{dx^{q+1}}$$
$$+ (q-n)(q-n-1)\frac{d^q(x^2-1)^n}{dx^q} + 2x\frac{d^{q+1}(x^2-1)^n}{dx^{q+1}}$$
$$+ 2(q-n)\frac{d^q(x^2-1)^n}{dx^q} = n(n+1)\frac{d^q(x^2-1)^n}{dx^q}.$$

Mais $\qquad 2x(q-n) + 2x = 2x(q-n+1),$

et $\qquad n(n+1) - (q-n)(q-n-1) - 2(q-n)$
$$= 2nq + 2n - q^2 - q$$
$$= (2n-q)(q+1).$$

etc...

NOTES RELATIVES A LA QUESTION 333

1. Nous poserons

$$K_n = (x-a)^n.(x-b)^n, \qquad P_n = \frac{1}{2^n.n!}.K_n^{(n)},$$
$$m = n + s, \qquad a + b = 2p, \qquad a - b = 2r.$$

2. *Propriété I du polynôme* P. — La relation

$$K_n = (x-a)^n.(x-b)^n$$

donne $\quad K'_n = n(x-a)^{n-1}.(x-b)^{n-1}.[2x - \overline{a+b}],$

ou $\quad K'_n = 2n(x-p).K_{n-1},$

(*) JORDAN, *Analyse*, t. Ier, p. 89.

d'où, en différentiant m fois,

$$K_n^{(m+1)} = 2n(x - p).K_{n-1}^{(m)} + 2nmK_{n-1}^{(m-1)}.$$

Mais $$m = n + s,$$
on a donc

$$K_n^{(n+s+} = 2n(x - p).K_{n-1}^{(n+s)} + 2n(n + s)\ K_{n-1}^{(n-1+s)},$$

d'où, en multipliant par $\frac{1}{2^n.n!}$,

(I) $$P_n^{(s+1)} = (x - p).P_{n-1}^{(s+1)} + (n + s).P_{n-1}^{(s)}.$$

3. *Cas particulier.* — Pour $s = 0$, on a

(1) $$P'_n = (x - p).P'_{n-1} + n.P_{n-1},$$

4. *Propriété II.* — Nous avons trouvé tout à l'heure la formule

$$K'_n = n.K_{n-1}[2x - \overline{a + b}],$$

nous en tirons

$$K'_n = 2nK_{n-1}(x - a) + n(a - b)K_{n-1}.$$

d'où, en multipliant par $x - b$,

$$(x - b)K'_n = 2nK_n + n(a - b)(x - b).K_{n-1}.$$

Différentions m fois, il viendra :

$$(x - b).K_n^{(m+1)} + mK_n^{(m)}$$
$$= 2nK_n^{(m)} + n(a - b) - (x - b).K_{n-1}^{(m)} + nm(a - b).K_{n-1}^{(m-1)},$$

ou

$$(x - b).K_n^{(m+1)} + (m - 2n)K_n^{(m)}$$
$$= n(a - b)(x - b).K_{n-1}^{(m)} + n.m(a - b).K_{n-1}^{(m-1)},$$

ou

$$(x - b).K_n^{(m+s+1)} + (s - n)K_n^{(n+s)}$$
$$= n(a - b).(x - b)K_{n-1}^{(n+s)} + n(n + s)(a - b).K_{n-1}^{(n+s-1)}.$$

On aurait aussi :

$$(x - a)K_n^{(n+s+1)} + (s - n)K_n^{(n+s)}$$
$$= n(b - a)(x - a)K_{n-1}^{(n+s)} + n(n + s)(b - a)K_{n-1}^{(n+s-1)},$$

d'où, en additionnant,

$$2(x - p)K_n^{(n+s+1)} + 2(s - n)K_n^{(n+s)} = n(a - b)^2.K_{n-1}^{(n+s)},$$

et, en multipliant par $\frac{1}{2^n.n!}$,

$$2(x - p)P_n^{s+1} + 2(s - n)P_n^{(s)} = \frac{1}{2}(a - b)^2.P_{n-1}^{(s+1)},$$

ou

(II) $$(x - p)P_n^{(s+1)} = (n - s)P_n^{(s)} + r^2P_{n-1}^{(s+1)}.$$

5. *Cas particulier.* — Pour $s = 0$ il reste

(2) $$(x - p)P'_n = n.P_n + r^2.P'_{n-1}.$$

6. *Propriété III.* — Dans la formule (I) changeons n en $n + 1$, elle devient

(I′) $\quad P_{n+1}^{(s+1)} = (x - p)P_n^{(s+1)} + (n + 1 + s)P_n^{(s)}$

ou

(II) $\quad (x - p)P_n^{(s+1)} = (n - s)P_n^{(s)} + r^2.P_{n-1}^{(s+1)}.$

On a donc

(III) $\quad P_{n+1}^{(s+1)} = (2n + 1)P_n^s + r^2P_{n-1}^{(s+1)}$

7. *Cas particulier.* — Pour $s = 0$, on a

(3) $\quad P'_{n+1} = (2n + 1)P_n + r^2P'_{n-1}.$

8. *Propriété IV.* — Si l'on élimine $P_n^{(s)}$ entre les formules (I) et (III), il vient

$$(n - s).P_{n+1}^{(s+1)} = (2n + 1).(x - p)P_n^{(s+1)} - r^2(n + s + 1).P_{n-1}^{(s+1)}$$

ou

(IV) $\quad (n-s)P_{n+1}^{(s+1)}-(2n+1).(x-p).P_n^{(s+1)}+r^2(n+s+1).P_{n-1}^{(s+1)}=0.$

9. *Cas particulier.* — Pour $s = -1$,

(4) $\quad (n + 1).P_{n+1} - (2n + 1)(x - p).P_n + nr^2P_{n-1} = 0.$

Corollaire. — Cette dernière formule montre que l'équation $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles.

10. *Propriété V.* — Ecrivons les formules I et II de cette manière

(I) $\quad P_n^{(s+1)} - (x - p)P_{n-1}^{(s+1)} = (n + s)P_{n-1}^{(s)},$

et

(II) $\quad (x - p)P_n^{(s+1)} - r^2P_{n-1}^{(s+1)} = (n - s)P_n^{(s)}.$

Eliminons entre ces deux relations la quantité $P_{n-1}^{(s+1)}$, il vient

$$[(x - p)^2 - r^2]P_n^{(s+1)} = (n - s)(x - p)P_n^{(s)} - r^2(n + s)P_{n-1}^{(s)},$$

Mais II donne, par le changement de $s + 1$ en s:

$$r^2P_{n-1}^{(s)} = (x - p)P_n^s - (n - s + 1)P_n^{(s-1)}.$$

On a donc

$$[(x-p)^2-r^2]P_n^{(s+1)} = (n-s)(x-p)P_n^{(s)} - (x-p).(n+s).P_n^{(s)} + (n + s)(n - s + 1)P_n^{(s-1)},$$

ou

(V) $\quad [(x-p)^2-r^2]P_n^{(s+1)}+2s(x-p)P_n^{(s)}+(n+s)(s-n-1)P_n^{(s-1)}=0,$

ou encore

(VI) $\quad (x-a)(x-b)P_n^{(s+1)}+2s(x-p)P_n^{(s)}+(n+s)(s-n-1)P_n^{(s+1)}=0.$

11. *Cas particulier.* — Pour $s = 1$, on a

(5) $\quad [(x - p)^2 - r^2]P''_n + 2(x - p)P'_n - n(n + 1)P_n = 0,$

ou

(5) $\quad (x - a)(x - b)P''_n + 2(x - p)P'_n - n(n + 1)P_n = 0.$

12. *Propriété VI.* — Entre I et II, éliminons $P_n^{(s+1)}$, il vient

$$[(x - p)^2 - r^2]\, P_{n-1}^{(s+1)} = (n - s)P_n^{(s)} - (n + s)(x - p)P_{n-1}^{(s)}$$

ou

$$(x - a)(x - b).P_{n-1}^{(s+1)} = (n - s)P_n^{(s)} - (n + s)(x - p)P_{n-1}^{(s)}.$$

Augmentant n de 1, cette formule devient

(VI) $(x-a)(x-b).P_n^{(s+1)}=(n-s+1)P_{n+1}^{(s)}-(n+s+1)(x-p)P_n^{(s)}$.

13. *Cas particulier.* — Si $s=0$,

$$(x-a)(x-b)P'_n=(n+1)P_{n+1}-(n+1)(x-p)P_n,$$

ou

$$(6) \qquad \frac{(x-a)(x-b)}{n+1}P'_n=P_{n+1}-(x-p)P_n.$$

14. *Propriété VII.* — Dans la démonstration de la formule V, nous avons établi la relation

(VII) $(x-a)(x-b)P_n^{(s+1)}=(n-s)(x-p)P_n^{(s)}-r^2(n+s)P_{n-1}^{(s)}$.

15. *Cas particulier.* —Pour $s=0$,

$$(x-a)(x-b)P'_n=n(x-p)P_n-r^2nP_{n-1},$$

ou

$$(7) \qquad \frac{(x-a)(x-b)}{n}.P'_n=(x-p).P_n-r^2P_{n+1}.$$

16. *Propriété VIII.* — Posons

$$(x-a).(x-b)=x^2+kx+l,$$

et la formule (5) s'écrira

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2+kx+l)\cdot\frac{d^{n+1}(x^2+kx+l)^n}{dx^{n+1}}\right]=n(n+1)\frac{d^n(x^2+kx+l)^n}{dx^n}$$

d'où en multipliant par dx et en intégrant

$$(x^2+kx+l)\frac{d^{n+1}(x^2+kx+l)^n}{dx^{n+1}}=n(n+1)\frac{d^{n-1}(x^2+kx+l)^n}{dx^{n-1}}.$$

17. *Conséquence de* (4). — La formule

$$(4) \quad (n+1)P_{n+1}-(2n+1)(x-p)P_n+nr^2P_{n-1}=0$$

donne $$\frac{P_n}{P_{n+1}}=\frac{n+1}{(2n+1)(x-p)-nr^2\dfrac{P_{n-1}}{P_n}}.$$

Il en résulte

$$\frac{P_n}{P_n}=\cfrac{n+1}{(2n+1)(x-p)-\cfrac{n^2r^2}{(2n-1)(x-p)-\cfrac{(n-1)^2r^2}{(2n-3)(x-p)}}}$$

et ainsi . . . . . .

$$P_{n+1}=P_n:\cfrac{n+1}{(2n+1)(x-p)-\cfrac{n^2r^2}{(2n-1)(x-p)-\cfrac{(n-1)^2r^2}{(2n-3)(x-p)\dots}}}$$

QUESTION 340

Solution par M. SVÉCHNICOFF, à Troïtzk (Russie).

On considère une ellipse Γ *de centre* O *et la circonféreзce* Δ *décrite sur le petit axe comme diamètre. D'un point* M, *mobile sur* Γ, *on mène, à* Δ, *les tangentes* MP, MQ.

Il existe, dnns Δ, *une corde* P′Q′, *parallèle à* PQ, *et telle que* OP′, OQ′ *soient respectivement perpendiculaires sur* OP, OQ.

Démontrer que P′Q′ *passe par un point fixe.* (G. L.)

Du point M abaissons la perpendiculaire MN sur l'axe focal et désignons par A le point de rencontre de l'axe focal et de la droite P′Q′. Soient S et B les points d'intersection des droites PQ et P′Q′ avec OM.

Les triangles semblables XOY et MON donnent

$$OA : OB = OM : ON.$$

Les triangles rectangles P′OB et PMS semblables donnent

$$OB : b = MS : MP.$$

Mais
$$MS = \frac{\overline{MP}^2}{OM}.$$

Par conséquent,
$$OB : b = MP : OM$$

et
$$OA = \frac{bPM}{ON} = b\sqrt{\frac{\overline{OM}^2 - \overline{OP}^2}{\overline{ON}^2}} = b\sqrt{\frac{\overline{ON}^2 + \overline{MN}^2 - b^2}{\overline{ON}^2}} = b$$

$$\sqrt{\frac{\overline{ON}^2 + b^2\left(1 - \frac{\overline{ON}^2}{a^2}\right) - b^2}{\overline{ON}^2}} = b\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Finalement $OA = \dfrac{bc}{a}$. Le point A est un point fixe.

NOTA. — Solutions diverses par MM. DROZ-FARNY; LEBESGUE; BARISIEN.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 17780-8-93.

SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES
ET L'ÉLIMINATION

Par M. **H. Laurent.**

1. — La théorie des fonctions entières de plusieurs variables présente encore bien des points à éclaircir. Dans ce travail je me suis surtout attaché à la théorie des fonctions symétriques et de l'élimination ; je commencerai par rappeler une méthode relative à deux équations que j'ai fait connaître dans une courte Note insérée dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*.

Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, deux polynômes entiers en x, de degré m (l'un d'eux pouvant d'ailleurs être de degré inférieur); proposons-nous d'éliminer x entre les deux équations

(1) $$\varphi(x) = 0, \qquad \psi(x) = 0.$$

A cet effet, désignons par $a_1, a_2, \dots a_m$ des arbitraires, indépendantes des coefficients de φ et ψ ; ce seront, si l'on veut, les nombres $0, 1, 2, \dots m-1$; ce seront des quantités $a, a+\Delta a, a+2\Delta a+\Delta^2 a, \dots, \Delta a$ désignant un infiniment petit ; etc. Posons

$$F(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m),$$

et considérons la fonction

$$\theta(x, a) = \frac{\varphi(x)\psi(a) - \varphi(a)\psi(x)}{x-a} = \theta(a, x).$$

La formule d'interpolation de Lagrange donne

(2) $$\left\{\begin{array}{l} \theta(a_1, x) = \theta(a_1, a_1)\xi_1 + \theta(a_1, a_2)\xi_2 \dots + \theta(a_1, a_m)\xi_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \theta(a_m, x) = \theta(a_m, a_1)\xi_1 + \theta(a_m, a_1)\xi_1 \dots + \theta(a_m, a_m)\xi_m; \end{array}\right.$$

formules où l'on a posé

$$\xi_i = \frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}.$$

D'ailleurs,

(3) $$\xi_1 + \xi_2 + \dots \xi_m = 1.$$

Si l'on désigne par Θ le déterminant

$$\sum \pm \theta(a_1, a_1)\theta(a_2, a_2)\dots\theta(a_m, a_m),$$

je dis que $\Theta = 0$ sera la résultante des équations (1). En effet, appelons X le déterminant $\sum \pm \xi_{11}\, \xi_{22} \ldots \xi_{ii}$ désignant la valeur que prend ξ_i quand on y remplace x par la racine x_j de $\psi = 0$; si dans (2) on remplace successivement x par les racines $x_1, x_2, \ldots x_m$ de $\psi = 0$, on aura m^2 équations de la forme

$$\theta(a_i, x_j) = \theta(a_i, a_1)\xi_{ij} + \ldots + \theta(a_i, a_m)\xi_{mj},$$

ce qui montre que l'on a

$$\sum \pm \theta(a_1, x_1)\, \theta(a_2, x_2) \ldots \theta(a_m, x_m) = \Theta X.$$

Mais si l'on désigne par P le déterminant

$$\sum \mp \frac{1}{x_1 - a_1} \frac{1}{x_2 - a_2} \cdots \frac{1}{x_m - a_m},$$

l'équation précédente s'écrira

$$\Pi\varphi(x_i)\, \Pi\psi(a_i).\mathrm{P} = \Theta \mathrm{P} \Pi \mathrm{F}(a_i) \Pi \frac{1}{\mathrm{F}'(a_i)},$$

c'est-à-dire, en désignant par ω le coefficient de x^m dans ψ, et en observant que $\Pi\mathrm{F}(x_i)$ est égal à $(-\omega)^m \Pi\psi(a_i)$:

$$\Pi\varphi(x_i) = \frac{\Theta(-\omega)^m}{\Pi\mathrm{F}'(a_i)}.$$

Donc $\Theta = 0$ est la résultante des formules (1), puisque ω et $\Pi\mathrm{F}'(a_i)$ sont des quantités purement numériques. Maintenant, nous ferons les remarques suivantes:

1° Le déterminant Θ est symétrique, car $\theta(x,a) = \theta(a,x)$;

2° Si l'on suppose

$$a_1 = a, \quad a_2 = a + h, \quad \ldots a_m = a + \overline{m - 1}\, h,$$

on aura $\theta(a_i, a_j) = \theta(a + \overline{i - 1}\, h,\ a + \overline{i - j}\, h)$;

et en combinant convenablement les lignes et les colonnes de Θ, son élément général pourra s'écrire

$$(4) \qquad [\Delta_x^i \Delta_y^i \theta(x, y)]_{x=a,\ y=a}.$$

Posant $h = 0$, on pourra mettre la résultante sous la forme

$$\sum \pm \theta(x, y) \frac{\partial^2\theta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^4\theta}{\partial x^2 \partial y^2} \cdots \frac{\partial^{2m-2}\theta}{\partial x^{m-1} \partial y^{m-1}} = 0,$$

en faisant $x = y$ après les différenciations.

3° Lorsque l'élément général de θ a été mis sous la forme (4), il est facile de vérifier le théorème de Bezout; mais nous n'insistons pas sur ce point.

4° La méthode d'élimination indiquée ici se prête fort bien à la discussion des racines communes. Nous ne ferons pas cette discussion directement, elle n'offre aucune difficulté; nous ferons seulement observer que les valeurs de la racine commune sont données par les valeurs de $\xi_1, \xi_2, \dots \xi^m$.

5° La méthode exposée peut s'étendre, comme nous l'avons montré. (*N. A.*, juillet 1893.)

Bien que les considérations précédentes soient fondées, on voudra bien l'observer, sur les propriétés des fonctions symétriques, elles n'empruntent rien à cette théorie et, par conséquent, il nous sera permis de déduire la théorie des fonctions symétriques de celle de l'élimination, à l'inverse de ce que l'on fait habituellement.

Considérons, au lieu des équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$, les équations

$$\text{(5)} \qquad \psi = 0, \quad \varphi + z = 0.$$

Le résultant de ces deux équations, obtenu en appliquant la méthode donnée plus haut, sera un polynôme entier en z de degré m de la forme

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \dots + A_m.$$

Il est évident que A_m, valeur de ce polynôme pour $z = 0$, ne sera autre chose que Θ, alors $A_m = 0$, ou $\Theta = 0$, sera la condition pour que les équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ aient au moins une racine commune. Mais la résultante des équations (5) est

$$(z + \varphi_1)(z + \varphi_2) \dots (z + \varphi_m) = 0.$$

$$A_n = \Pi\varphi(x_i), \qquad A_{m-1} = \Sigma\varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \varphi(x_{m-1}), \dots$$

et l'on voit que si $A_m = 0$, $A_{m-1} = 0$, les équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ont deux racines communes : elles en auraient trois si l'on avait en outre $A_{m-2} = 0$; et ainsi de suite.

Il est facile de voir que Θ, étant considéré comme fonction de $a_1, a_2, \dots a_n$, est divisible par le produit des carrés $F'(a_1)$ $F'(a_2) \dots$ des différences de ces quantités, en sorte que $\Pi\varphi$ ou $\dfrac{\Theta}{\Pi F'(a)}$ est à coefficients entiers par rapport aux coefficients de φ et ψ; il n'entrera même aucun nombre entier en dénominateur dans $\Pi\varphi(x_i)$. Or nous venons d'apprendre à former des

fonctions symétriques des racines de $\psi(x) = 0$ de la forme

$$\sum \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3) = \mathrm{U},$$

par exemple. Si l'on suppose $\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x_2^2 + \ldots$ le coefficient de $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$ dans U sera la fonction symétrique simple $\sum x_1^i x_2^j x_3^k$ laquelle, comme on voit, sera entière par rapport aux coefficients de ψ et à coefficients numériques entiers; donc :

Les fonctions symétriques simples, et par suite, toutes les fonctions symétriques entières à coefficients numériques entiers, des racines d'une équation algébrique, sont entières par rapport aux coefficients de cette équation, et à coefficients numériques entiers.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA PARABOLE

Par M. **P. Delens**, professeur de mathématiques spéciales, au lycée de Rouen.

Lorsqu'on cherche l'intersection d'une parabole rapportée à son axe et à la tangente en son sommet, avec une autre courbe, il est souvent commode d'exprimer les coordonnées d'un point de la parabole en fonction du coefficient angulaire de la tangente en ce point, ou de l'inverse de ce coefficient angulaire. L'emploi de cette méthode conduit à des relations qui peuvent être utiles et qu'il m'a paru intéressant de signaler.

I. — Soit donc t l'inverse du coefficient angulaire de la tangente en un point d'une parabole P rapportée aux axes ordinaires, c'est-à-dire la cotangente de l'angle que forme cette tangente avec l'axe de la parabole, et soit :

(1) $f(x, y) = \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + \varphi_0 = 0,$

l'équation, dans ce système d'axes, d'une courbe algébrique quelconque C; les coordonnées de tout point de la parabole seront :

(2) $$x = \frac{pt^2}{2}, \qquad y = pt,$$

et les valeurs de t correspondant, aux points d'intersection des deux courbes P et C, seront données par l'équation :

$$p^m t^m \varphi_m\left(\frac{t}{2}, 1\right) + p^{m-1}t^{m-1}\varphi_{m-1}\left(\frac{t}{2}, 1\right) + \ldots + \varphi_0 = 0.$$

Posons :

$$\varphi_m(x, y) = A_0x^m + A_1x^{m-1}y + \ldots + A_my^m,$$
$$\varphi_{m-1}(x, y) = B_0x^{m-1} + B_1x^{m-2}y + \ldots + B_{m-1}y^{m-1}.$$

L'équation en t, ordonnée, sera alors :

(3) $$A_0p^mt^{2m} + 2A_1p^mt^{2m-1} + 2(2A_2p + B_0)p^{m-1}t^{2m-2} + \ldots = 0.$$

La somme des racines de cette équation sera donc donnée par la formule : $\sum t = -2\frac{A_1}{A_0}$. — D'autre part, l'équation qui donne les inverses des coefficients angulaires des directions asymptotiques de la courbe C est :

(4) $$A_0\theta^m + A_1\theta^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

et la somme de ses racines est donnée par la formule $\sum\theta = -\frac{A_1}{A_0}$; il existe donc entre les deux sommes la relation :

(5) $$\sum t = 2\sum\theta,$$

laquelle conduit au théorème suivant, que je voulais établir :

La somme des cotangentes des angles que font avec l'axe d'une parabole les tangentes à cette courbe en ses points d'intersection avec une courbe algébrique quelconque est double de la somme des cotangentes des angles que font, avec ce même axe, les directions asymptotiques de la courbe.

Il résulte en particulier, de ce théorème, que la première somme reste constante lorsque la parabole (ou la courbe donnée) se déplace parallèlement à soi-même, ou quand on remplace cette courbe par une autre, admettant les mêmes directions asymptotiques.

Un cas particulier intéressant est celui des courbes, appelées quelquefois *isotropiques*, qui n'admettent pour directions asymptotiques que celles du cercle; on voit en effet que la somme des cotangentes reste alors constante, quelle que soit la manière dont la parabole se déplace dans son plan, et qu'elle est toujours nulle. — On peut donc énoncer, comme corollaire du théorème cité plus haut, la proposition suivante :

La somme des cotangentes des angles que font, avec l'axe d'une parabole, les tangentes, à cette courbe, en ses points d'intersection avec une courbe isotropique quelconque, est toujours nulle.

Dans le cas du cercle, la réciproque est également vraie; donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que quatre points d'une parabole soient sur une circonférence, est que la somme des cotangentes des angles que font, avec l'axe de la parabole, les tangentes en ces points soit nulle.

Parmi les nombreuses applications de ces théorèmes, je me contenterai de citer les suivantes, dont la démonstration en découle immédiatement :

Si quatre des six points d'intersection d'une cubique circulaire avec une parabole sont sur une circonférence, la droite qui passe par les deux autres points est parallèle à l'asymptote de cette cubique.

Si quatre des huit points d'intersection d'une quartique isotropique avec une parabole sont sur une circonférence, les quatre autres points sont aussi sur une circonférence.

II. — Revenons maintenant au problème primitif; l'équation (3) nous fournira une circonférence, au moyen des formules (2), les coordonnées des points d'intersection des courbes C et P, et nous en déduirons aussitôt, en appelant (x_1, y_1), (x_2, y_2) ... ces coordonnées, les formules

$$\sum x_1 = \frac{p}{2}\sum t^2, \qquad \sum y_1 = p\sum t,$$

ou, tous calculs effectués :

$$(6) \qquad \sum x_1 = 2p\sum \theta^2 - 2\frac{B_0}{A_0}, \quad \sum y_1 = 2p\sum\theta.$$

Considérons d'abord cette dernière formule; elle montre que $\sum y_1$ reste constante lorsque la corube C se déplace parallèlement à elle-même; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Le centre des moyennes distances des points d'intersection d'une parabole et d'une courbe quelconque, reste situé sur une parallèle à l'axe de cette parabole, lorsque la courbe se déplace, dans le plan, parallèlement à une direction quelconque; et cette parallèle à

l'axe est la même pour toutes les courbes ayant mêmes directions asymptotiques.

Considérons de nouveau la première des formules (6) ; elle nous montre que $\sum x_1$ dépend de B_0, et ne reste par suite pas constante en général, lorsque la courbe C se déplace parallèlement à elle-même dans le plan; mais cet accident peut se produire pour une direction particulière. Pour le vérifier, nous supposerons que tous les points de la courbe C subissent une translation arbitraire, égale et parallèle à OO'; si nous appelons (a, b) les coordonnées du point O', la nouvelle équation de la courbe se déduira de l'ancienne par le changement de x et y en $x - a$ et $y - b$; cette équation sera, tous calculs effectués :

$$(7) \qquad \varphi_m(x, y) + (B_0 - mA_0a - A_1b)x^{m-1} + \ldots = 0.$$

La nouvelle valeur du coefficient de x^{m-1} sera donc égale à l'ancienne et indépendante de la grandeur de la translation, si l'on a la relation

$$(8) \qquad mA_0a + A_1b = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = -\frac{A_1}{mA_0} = \frac{\sum \theta}{m}.$$

Ainsi, il existe, dans le plan, une direction particulière pour laquelle $\sum x_1$ reste constante quand la courbe C se déplace parallèlement à cette direction ; et celle-ci est telle que la cotangente de l'angle qu'elle forme avec l'axe de la parabole P est la moyenne arithmétique des cotangentes des angles que forment, avec ce même axe, les directions asymptotiques de la courbe C; c'est la direction du diamètre de Newton, de la courbe C, conjugué à la direction de l'axe de parabole P. — Nous pourrons alors énoncer le théorème suivant :

Le centre des moyennes distances des points d'intersection d'une parabole P *et d'une courbe quelconque* C *reste fixe lorsque la courbe se déplace dans un plan, parallèlement au diamètre de Newton de la courbe* C, *conjugué à la direction de l'axe de la parabole* P ; *et ce centre est le même pour toutes les courbes qui admettent les mêmes asymptotes.*

Dans le cas particulier des *courbes isotropiques*, on voit que le centre des moyennes distances est toujours sur l'axe de la parabole, *quelle que soit la courbe considérée et sa position dans le plan ;* de plus, ce centre reste complètement fixe lorsque la courbe se déplace perpendiculairement à l'axe de la parabole; ou retrouve donc ainsi une proposition démontrée par M. d'Ocagne, dans le cas du cercle, et dont il a donné d'intéressantes applications (*).

III. — Les propriétés que nous venons de rencontrer pour la parabole peuvent être regardées comme une extension de certaines propriétés évidentes ou bien connues, de la ligne droite, et en particulier de celle-ci : *Le centre des moyennes distances des points d'intersection d'une courbe quelconque et d'une droite reste fixe lorsque la courbe se déplace parallèlement au diamètre de Newton, conjugué à la direction de la droite.* — Ces propriétés peuvent être à leur tour généralisées et s'étendent sans peine aux diverses courbes paraboliques d'ordre quelconque dont l'équation se ramène à la forme :

$$(9) \qquad x = \alpha_0 y^q + \alpha_1 y^{q-1} + \ldots\ldots + \alpha_q,$$

quand on prend pour axe des x leur direction asymptotique.

En effet, l'équation aux ordonnées des points d'intersection de cette courbe P, avec une courbe algébrique quelconque C, est alors, en conservant les notations précédentes :

$$A_0(\alpha_0 y^q + \alpha_1 y^{q-1} + \ldots)^m + (A_1 y + B_0)(\alpha_0 y^q + \ldots)^{m-1} + \ldots = 0,$$

ou

$$(10) \qquad A_0\alpha_0^m y^{mq} + mA_0\alpha_0^{m-1}\alpha_1 y^{mq-1} + \ldots = 0,$$

si l'on suppose toutefois $q > 2$.

La somme des racines de cette équation est donc donnée par la formule : $\sum y_1 = -m\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, et cette somme reste constante quand la courbe C se déplace d'une manière quelconque dans le plan ; de sorte que le centre des moyennes distances des points d'intersection des deux courbes est constamment situé sur une parallèle à la direction asymptotique de la

(*) Voir *J. S.* 1891, p. 97.

courbe parabolique P ayant pour équation

$$y = -\frac{\alpha_1}{q\alpha_0},$$

la même, quelle que soit la courbe C, et qui, par suite, représente son diamètre de Newton.

Cherchons maintenant la somme des abscisses des points d'intersection des courbes P et C; elle sera donnée par la formule

$$(11)\quad \sum x_1 = \alpha_0 \sum y_1^q + \alpha_1 \sum y_1^{q-1} + \ldots + mq\alpha_q,$$

où y_1 représente une quelconque des racines de l'équation (10).

D'ailleurs, une somme telle que $\sum y_1^h$, des puissances h des racines d'une équation, ne dépend que des coefficients des $h + 1$ premiers termes de cette équation ; donc $\sum y_1$, $\sum y_1^2$,... $\sum y_1^{q-1}$ ne dépendent que des coefficients A_0 et A_1, et $\sum y^q$, des coefficients A_0, A_1 et B_0. Par suite, $\sum x_1$ reste constant pour toutes les courbes C admettant les mêmes asymptotes, ou encore quand une de ces courbes C se meut parallèlement à son diamètre de Newton, conjugué à la direction asymptotique de la parabole donnée P; et, dans ce cas, le centre des moyennes distances des points d'intersection des deux courbes est fixe. On peut donc énoncer le théorème suivant :

1° *Le centre des moyennes distances des points d'intersection d'une parabole* P *d'ordre supérieur à deux, et d'une courbe quelconque* C *est situé sur le diamètre de Newton de cette parabole.*

2° *Ce centre est le même pour toutes les courbes qui admettent les mêmes asymptotes ; il reste fixe quand la courbe* C *se déplace dans le plan parallèlement à son diamètre de Newton, conjugué à la direction asymptotique de la parabole* P.

La différenciation de la relation (11) nous conduit enfin à une autre propriété analogue à celle que nous avons établie en premier lieu pour la parabole du second degré. Elle nous donne en effet la formule

$$(12)\quad \sum \frac{dx_1}{dy_1} = q\alpha_0 \sum y_1^{q-1} + (q-1)\alpha_1 \sum y_1^{q-2} + \ldots + mq\alpha_{q-1}.$$

Cette somme ne dépend donc que des coefficients A_0 et A_1 et elle reste par suite constante en même temps que eux-ci; donc:

La somme des cotangentes des angles que font, avec la direction asymptotique d'une parabole d'ordre quelconque, les tangentes à cette courbe, en ses points d'intersection avec une courbe algébrique, reste constante quand cette courbe se déplace dans le plan, parallèlement à elle-même, ou quand on la remplace par une autre ayant les mêmes directions asymptotiques.

Cherchons, en terminant, la valeur de cette somme pour la courbe parabolique particulière : $x = \alpha y^q$; et, pour simplifier, remplaçons la courbe C par le faisceau de ses directions asymptotiques ; nous obtiendrons la formule

$$\sum \frac{dx_1}{dy_1} = q\alpha \sum y_1^{q-1} = -q(q-1)\frac{A_1}{A_0}$$

ou, avec nos notations primitives:

$$\sum t = q(q-1)\sum \theta,$$

formule qui se réduit bien, pour $q = 2$, à celle que nous avons trouvée d'abord pour la parabole du second degré, et montre comment elle se généralise.

NOTE SUR L'APPLICATION

D'UNE PROPRIÉTÉ RELATIVE AUX CONIQUES

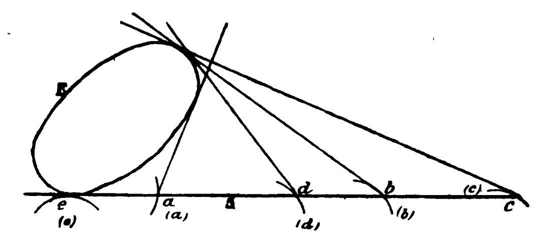
Par M. G. Leinekugel, élève-ingénieur hydrographe.

Une propriété très connue, que nous allons rappeler, donne une construction graphique simple du centre de courbure des courbes diamétrales définies de la manière la plus générale.

Considérons deux droites Δ, Δ' qui sont des tangentes infiniment voisines à une courbe (e) et rencontrent quatre courbes (a), (b), (c) et (d) en des points a, a'; b, b'; c, c'; d, d'. Ces points a, b, c, d et a', b', c', d', forment deux divisions anharmoniques égales. On sait qu'il existe une conique tangente à ces six droites Δ, Δ', aa', bb', cc', et dd' en vertu de cette propriété :

Les tangentes à une conique déterminent, sur deux droites qui la touchent, des divisions anharmoniques égales.

Si nous passons à la limite, nous en concluons que, si une droite Δ se déplace en touchant une courbe (*e*) en *e* et rencontrant trois courbes (*a*), (*b*), (*c*) en des points *a*, *b*, *c*, la



tangente en un point *d* de Δ à la courbe (*d*) décrite par ce point lorsque le rapport anharmonique (*abcd*) est égal à une constante λ, est la tangente menée de ce point à la conique (E) qui touche Δ en *e*, et les droites qui touchent (*a*), (*b*), (*c*) aux points *a*, *b*, *c*.

Cela posé, considérons le cas particulier où la courbe (*c*) devient la droite de l'infini, on a alors :

$$\frac{da}{db} = c^{te} = \lambda.$$

La courbe (E) est alors une parabole. Mais, si l'on fait tourner d'un angle droit toutes les tangentes à une parabole (E), autour des points où ces droites rencontrent une de ses tangentes, les nouvelles droites sont encore tangentes à une parabole (E').

Cette droite, autour de laquelle nous faisons pivoter les tangentes de (E), étant Δ, on voit que notre nouvelle parabole (E') est tangente à Δ; et de plus à la normale Δ' à (*e*) au point *e*; les points de contact avec Δ et Δ' étant évidemment le point où la tangente à (E), parallèle à Δ', rencontre Δ, et le point milieu du segment compris entre *e* et le centre de courbure de (E) en ce point.

Comme Δ, Δ' sont deux tangentes à (E'), d'après la propriété rappelée au début,

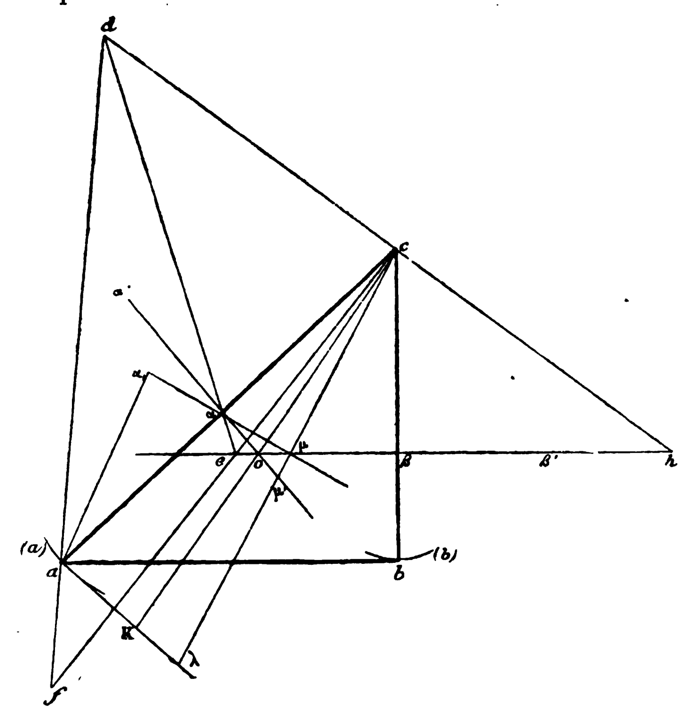
$$(a'b' \infty d') = (ab \infty d)$$

$$\frac{d'a'}{d'b'} = \frac{da}{db} = constante,$$

si *a'*, *b'*, *d'* sont les points de rencontre des normales en *a*, *b* *d* à (*a*) (*b*) (*d*), avec la droite Δ'.

Nous allons montrer comment on peut construire graphiquement le centre de courbure δ en d si l'on se donne les centres de courbure $\alpha, \beta, \varepsilon$, en a, b, e aux courbes considérées.

Auparavant nous démontrerons le lemme suivant :



Lemme. — *On considère un triangle* abc *rectangle en* b, *les côtés* bc, ac *sont normaux aux courbes* (b) *et* (a). *En ces points* a, b, *les centres de courbure sont* β, α. *Construire la tangente à la courbe* (c) *décrite par* c.

On a $\dfrac{d(a)}{d(b)} = \dfrac{ac}{b\beta} \qquad \dfrac{d(b)}{d(c)} = \dfrac{b\beta}{c\mu} \qquad \dfrac{d(c)}{d(a)} = \dfrac{c\mu'}{a\alpha}$;

la multiplication de ces trois égalités donne :

$$(1) \qquad \frac{c\mu}{c\mu'} = \frac{ca}{a\alpha};$$

menons $a\alpha_1$, parallèle à $c\mu\mu'$, qui est considérée comme la normale à (c) en ce point et la droite $\alpha\mu$; les triangles $a\alpha_1\alpha$,

$c\alpha\mu$ donnent :

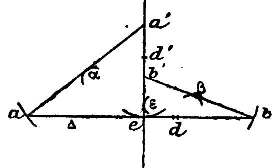
$$(2) \qquad \frac{c\mu}{\alpha_1 a} = \frac{c\alpha}{a\alpha}.$$

L'élimination entre (1) et (2) de $c\mu$ fournit la relation :

$$\frac{ca}{c\alpha} = \frac{a\alpha_1}{c\mu'}.$$

Donc $a\alpha_1$ doit être égal à $c\lambda$, ou, en d'autres termes, le point α_1 doit être sur ch perpendiculaire menée à ca par le point c. Construisons le triangle def dont les trois côtés passent par trois points en ligne droite a, α, c dont deux des sommets d, e décrivent les droites ch, βh le troisième sommet décrira une droite passant par h et par le point K dont la construction est évidente. Si l'on considère le cas où f est à l'infini dans la direction hK, il y correspond un point α_1 situé sur ch, et cette direction est par suite celle de la normale au lieu (d).

Inversement, si on se donne la normale en c et seulement le centre de courbure β de b, on en déduit le centre de courbure α de (a) en ce point.



Nous voyons que, grâce à ce lemme, nous aurons les normales en a', b' aux courbes décrites par ces points, puisqu'on suppose donnés les centres de courbure α, β, et ε. Ces droites sont les parallèles à h'K$'$, h''K$''$, déterminées graphiquement comme nous l'avons indiqué, menées par les points a', b'. Elles rencontrent la parallèle à Δ menée en ε aux points a'', b''; le point d'' tel que

$$\frac{d''a''}{d''b''} = \frac{d'a'}{d'b'} = \frac{da}{db} = \lambda,$$

joint à d', donne la normale au lieu (d') décrit par ce point. De la connaissance de cette normale on déduit celle du centre δ, de (d), comme nous l'avons montré.

Il suffit de supposer $\lambda = 1$ pour voir que l'on a graphiquement une construction du centre de courbure des courbes diamétrales considérées comme le lieu du milieu du segment ab déterminé sur une droite Δ qui enveloppe une courbe (e) et rencontre deux courbes (a) (b) en ces points a, b.

REMARQUE. — Un cas particulier intéressant de la propriété démontrée au début est celui où les courbes (e) et (a) se confondent. On obtient en effet cette propriété :

Une droite Δ *est assujettie à rencontrer trois courbes* (b), (c), (d) *en des points* b, c, d *et à toucher son enveloppe en un point* a *tel que* (abcd) = constante = λ. *Le centre de courbure en ce point* a *est celui d'une conique tangente à* Δ *en* a *et qui touche les droites tangentes à* (b), (c), (d) *en ces points* b, c, d.

Les deux courbes (E) et (e) sont osculatrices, comme ayant trois tangentes confondues en ce point. Pour construire une de ces droites, connaissant les trois courbes (b), (c), (d), on voit qu'il suffit de faire rayonner autour d'un point c de (c), par exemple, des droites, de déterminer sur chacune d'elles les points a tels que ($abcd$) = constante = λ et de mener les tangentes, de c, à ce lieu.

On voit que la connaissance des centres de courbure de (b), (c), (d), en ces points, n'est pas nécessaire pour cette construction.

ÉCOLE CENTRALE

(1re Session 1893.)

Géométrie analytique.

Etant donnés deux axes rectangulaires et, sur l'axe des x deux points A, B dont les abscisses sont a et b, sur l'axe des y un point C dont l'ordonnée est c, on considère le faisceau des hyperboles équilatères qui passent par les trois points A, B, C.

1° Former l'équation de celle de ces hyperboles qui a une asymptote dont le coefficient angulaire est un nombre donné λ, et former l'équation de cette asymptote.

Par un point quelconque du plan on peut mener une ou trois droites telles que chacune soit une asymptote d'une des hyperboles considérées. Former l'équation du lieu des points par lesquels passent trois droites qui satisfont à cette condition, et qui de plus sont telles que deux d'entre elles sont rectangulaires. Construire ce lieu, indiquer les points où il rencontre les côtés du triangle ABC; puis, prenant un point quelconque M sur ce lieu, trouver le centre de chacune des hyperboles considérées qui a une asymptote passant par ce point M.

2° Former l'équation de celle des hyperboles considérées qui a un axe dont le coefficient angulaire est un nombre donné μ, et former l'équation de cet axe.

Par un point quelconque du plan, on peut mener une ou trois droites

telles que chacune soit un axe d'une des hyperboles considérées. Former l'équation du lieu des points par lesquels passent trois droites qui satisfont à cette condition, et qui de plus sont telles que deux de ces droites ont des coefficients angulaires égaux et de signes contraires. Construire la ligne représentée par cette équation; et, sur cette ligne, limiter les parties sur lesquelles doit être un point pour que, par ce point, passent *trois droites réelles* satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Epure.

L'axe d'un cône de révolution supposé plein est situé dans le plan horizontal de projection, on considère les deux demi-nappes de ce cône situées au-dessus du plan horizontal et limitées à des plans parallèles; on les coupe par un cylindre oblique à base du cercle; on enlève du cône les parties situées dans l'intérieur du cylindre. On demande de représenter par ses projections le demi-cône solide dans lequel on a pratiqué ainsi une entaille cylindrique.

L'axe du cône est la bissectrice de l'angle en s du triangle asb.

Le côté ab coïncide avec la ligne de terre, et l'on a

$xa = 0^m,076$ $ab = 0^m,129$
$by = 0^m,065$ $as = 0^m,149$
$bs = 0,179$.

Les plans parallèles qui limitent le cône sont les suivants:

1° le plan mené par la ligne de terre et dont la partie supérieure fait, avec la partie antérieure du plan horizontal un angle de 60°.

2° le plan parallèle au précédent dont la trace horizontale cd est déterminée par $sc = 0^m,070$.

La base du cylindre est un cercle de $0^m,060$ de rayon, situé dans le plan vertical de projection au-dessus de la ligne de terre et tangent en b à cette ligne; les génératrices horizontales du cylindre sont parallèles à sb.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer:

1° Un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

2° Un point quelconque de l'une des bases du cône et la tangente en ce point.

3° Un point quelconque de la trace du cylindre sur l'un des plans de base du cône et la tangente en ce point.

Titre extérieur. Intersection de surfaces.

Titre intérieur. Cône entaillé par un cylindre.

Les titres, en lettres dessinées, sont de rigueur. — Le cadre a $0^m,450$ sur $0^m,270$.

La ligne de terre est parallèle aux petits côtés du cadre à $0^m,263$ du petit côté inférieur et à $0^m,187$ du petit côté supérieur.

EXERCICE ÉCRIT (*)

72. — Étant données deux circonférences (A) et (B), on considère une circonférence (Σ) tangente à (A) et (B). Lorsque (Σ) varie, le lieu du point de rencontre des tangentes communes à (A) et à (Σ) se compose d'une conique et d'une quartique : de même, le lieu du point de rencontre des tangentes communes à (B) et à (Σ) se compose aussi d'une conique et d'une quartique.

Étudier le genre des coniques, suivant la position des circonférences (A) et (B). *(E. N. Barisien.)*

Solution de l'exercice 71 (**).

Désignons par R le rayon du cercle (C) et par a la distance OP, O étant le centre du cercle (C). Soient x_1y_1 et x_2y_2 les coordonnés des points A et B, et m le coefficient angulaire de la corde AB.

1° Le cercle (C) et la corde AB ont donc pour équation, respectivement,

(1) $$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

(2) $$y = m(x - a).$$

Les cercles de diamètre PA et PB ont respectivement pour équation

(3) $$x^2 + y^2 - (x_1 + a)x - yy_1 + ax_1 = 0,$$

(4) $$x^2 + y^2 - (x_2 + a)x - yy_2 + ax_2 = 0.$$

L'équation de l'axe radical (D) s'obtient en retranchant les équations (1) et (3), ce qui donne

(5) $$x(x_1 + a) + yy_1 - (R^2 + ax_1) = 0.$$

Dans cette équation, x_1 et y_1 sont des fonctions du coefficient angulaire m, qui serait, alors, le seul paramètre variable de l'équation (5). Mais il est plus simple de poser

$$x_1 = R \cos \varphi, \qquad y_1 = R \sin \varphi,$$

et l'équation (5) devient

$$R(x - a) \cos \varphi + Ry \sin \varphi - (R^2 - ax) = 0.$$

On a donc immédiatement pour son enveloppe

$$R^2[(x - a)^2 + y^2] = (R^2 - ax)^2,$$

ou, en développant et réduisant

(6) $$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 - a^2} = 1.$$

La droite (D) enveloppe donc une ellipse, si le point P est à l'intérieur du cercle (C), ou une hyperbole, si le point P est extérieur au cercle (C).

(*) Nous avons publié, p. 205, une solution d'un exercice écrit, numéroté 69 par erreur. On trouvera, dans le prochain numéro, la solution de l'exercice 69, dont l'énoncé a été donné p. 159.

(**) Cette solution est de M. Barisien; nous en avons reçu une autre de M. Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille.

— La droite (D′) dont l'équation est

(7) $$x(x_2 + a) + yy_2 - (R^2 + ax_2) = 0,$$

enveloppe aussi la conique (6).

2° Pour avoir le lieu du point de rencontre de (D) et (D′), on devrait, en résolvant (1) et (2), calculer x_1, y_1, et x_2, y_2 en fonction de m, et porter ces valeurs dans (5) et (7). On éliminerait ensuite m entre (5) et (7). Le calcul ainsi fait serait fort long.

Voici une méthode d'élimination plus rapide.

On a
$$y_1 = m(x_1 - a),$$
$$y_2 = m(x_2 - a).$$

En portant ces valeurs dans (5) et (7), ces équations deviennent
$$x_1(x - a + my) - a(my - x) - R^2 = 0,$$
$$x_2(x - a + my) - a(my - x) - R^2 = 0.$$

Or, comme x_1 est différent de x_2, ces deux équations ne sont compatibles que si on a à la fois
$$x - a + my = 0,$$
$$a(my - x) + R^2 = 0,$$

En éliminant m entre ces deux équations, on trouve

(8) $$x = \frac{R^2 + a^2}{2a}.$$

Cette équation représente une ligne droite perpendiculaire au diamètre OP.

3° Pour traiter cette troisième partie de l'énoncé, il est avantageux de prendre des coordonnées polaires, O étant le pôle et OP l'axe polaire.

Soit S le centre de similitude externe des cercles (C) et AB, I le milieu de AB. On a
$$\frac{OS}{OI} = \frac{R}{R - AI}.$$

Or, posons $OS = r$, $\widehat{SOP} = \theta$.

Il vient
$$OI = a\cos\theta,$$
$$AI = \sqrt{R^2 - \overline{OI}^2} = \sqrt{R^2 - a^2\cos^2\theta}.$$

L'équation polaire du lieu de S est donc
$$r = \frac{aR\cos\theta}{R - \sqrt{R^2 - a^2\cos^2\theta}},$$
$$r = \frac{R[R + \sqrt{R^2 - a^2\cos^2\theta}]}{a\cos\theta}.$$

Cette équation, transformée en coordonnées cartésiennes, donne

(9) $$y^2 = \frac{x[ax^2 - 2R^2x + aR^2]}{2R^2 - ax}.$$

Si le point P est sur le cercle (C), on a
$$a = R.$$

L'équation (9) devient $$y^2 = \frac{x(x - R)^2}{2R - x}.$$

La courbe correspondante est une strophoïde droite, dont le point double est en P et le sommet en O.

Il convient de remarquer que la boucle intérieure de la strophoïde ne convient qu'au point de rencontre de similitude interne qui, dans le cas présent, est d'ailleurs toujours imaginaire.

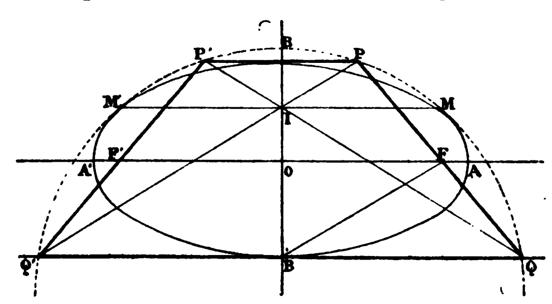
QUESTION 331

Solution par M. E.-N. Barisien.

Une circonférence enveloppe une ellipse et la touche en deux points réels; un trapèze inscrit dans cette circonférence a ses côtés parallèles sur les tangentes à l'ellipse aux extrémités du petit axe. Démontrer que chacun des côtés non parallèles du trapèze passe par l'un des foyers, et que chaque diagonale est parallèle à l'une des droites qui joignent les foyers aux extrémités du petit axe.

Lorsque les points de contact de l'ellipse avec le cercle sont imaginaires, ce sont les diagonales du trapèze qui passent par les foyers, et ce sont les côtés non parallèles qui ont les directions indiquées. (A. Tissot.)

Soient O le centre de l'ellipse, A et A′ les sommets du grand axe, B et B′ ceux du petit axe, F et F′ les foyers, M, M′ les points de contact du cercle et de l'ellipse, C, le centre du cercle, PP′ la petite base du trapèze, QQ′ la grande base.



L'ellipse étant rapportée à son centre et à ses axes, l'équation générale des coniques tangentes aux points d'intersection de l'ellipse avec une droite est

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1\right)^2=0.$$

Cette équation représentant une circonférence, le terme en xy n'existe pas; ainsi la corde de contact du cercle et de l'ellipse doit être parallèle à l'un des axes. Lorsque la corde

de contact sera parallèle au grand axe, le cercle tangent enveloppera l'ellipse. Si la corde de contact est parallèle au petit axe, le cercle tangent est à l'intérieur de l'ellipse. Du reste, les tangentes à l'ellipse en B et B', dans ce second cas, sont à égale distance du centre du cercle et déterminent, dans ce cercle, un rectangle dont les sommets sont imaginaires.

La corde de contact ne peut donc être que parallèle au grand axe.

Soit $y - q = 0$ l'équation de cette corde MM'. L'équation générale des coniques tangentes, aux points d'intersection de MM' avec l'ellipse, sera

$$\lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + (y - q)^2 = 0.$$

En exprimant que cette équation représente une circonférence, on a

$$\lambda c^2 = 1,$$

et l'équation de la circonférence en question est

(1) $$b^2(x^2 + y^2) + 2c^2qy - (a^2b^2 + c^2q^2) = 0.$$

Les deux tangentes à l'ellipse en B, B', peuvent être considérées comme constituant une conique correspondant à l'équation

(2) $$y^2 - b^2 = 0.$$

Une conique quelconque passant par les points d'intersection de (1) et (2) est représentée par

(3) $$b^2(x^2 + y^2) + 2c^2qy - (a^2b^2 + c^2q^2) + \mu(y^2 - b^2) = 0.$$

Cette conique représentera un système de droites si l'on a

$$\mu^2b^2 + \mu(a^2b^2 + c^2q^2 + b^4) + a^2(b^4 + c^2q^2) = 0,$$

ou $$[\mu b^2 + (c^2q^2 + b^4)][\mu + a^2] = 0.$$

On a donc, pour μ, deux valeurs μ', μ'',

$$\mu' = -\frac{c^2q^2 + b^4}{b^2}, \qquad \mu'' = -a^2.$$

La valeur $\mu = \infty$, portée dans (3), donne l'ensemble des droites PP', QQ'. Les valeurs μ' et μ'' donneront les systèmes PQ, P'Q' et PQ', P'Q.

La valeur de μ', portée dans (3), conduit à l'équation

(4) $$(qy - b^2)^2 - \frac{b^4x^2}{c^2} = 0.$$

Celle de μ'' donne, de même :

$$(5) \qquad b^2x^2 - c^2(y - q)^2 = 0.$$

Si l'on fait $y = 0$, dans l'équation des droites (4), on trouve $x^2 = c^2$; ainsi elles passent par les foyers de l'ellipse.

D'autre part, les droites (5) ayant pour coefficients angulaires $\pm \frac{b}{c}$ sont bien parallèles aux droites FB, F'B.

Il est facile de voir que ce sont bien les côtés non parallèles du trapèze PP'QQ' qui passent par le foyer et les diagonales qui sont parallèles à FB et F'B, en considérant le cas particulier du cercle principal de l'ellipse, décrit sur le grand arc comme diamètre.

La droite PQ passant par le foyer, il en résulte que FP et FQ sont égaux : par suite, la droite FB', passant par les milieux de deux côtés du triangle PQQ', est parallèle au troisième côté PQ'.

L'équation (5) représentant les diagonales PQ', P'Q, on voit qu'elles se coupent au point I, milieu de la corde MM'.

Le trapèze PP'QQ' sera réel si q est inférieur à b. Mais si q est supérieur à b, les droites (4) et (5) restent réelles, et cependant les sommets du trapèze sont imaginaires. Dans ce cas, rien ne semble changé à l'énoncé. Les droites (3) correspondant à la valeur μ' passent toujours par le foyer : les droites (3) correspondant à la valeur μ'' sont encore parallèles à FB et F'B. D'ailleurs, dans un trapèze, dont les sommets sont imaginaires, les côtés parallèles peuvent être distingués ; mais, pour les côtés non parallèles et les diagonales, il ne paraît pas possible d'en faire la distinction.

Remarque. — On montrerait par un calcul analogue au précédent que *en considérant les cercles doublement tangents intérieurement à l'ellipse, et en les coupant par les tangentes aux extrémités du grand axe, on forme ainsi des trapèzes d'intersection, à sommets imaginaires et dont deux des côtés réels passent par les foyers imaginaires de l'ellipse.*

QUESTION 335

Solution par M. H. LEBESGUE, élève au lycée Louis-le-Grand.

On considère une ellipse (E) *et une droite* (D) *passant par le centre de* (E) *perpendiculaire à l'une des diagonales du rectangle des axes. D'un point* M, *pris sur la droite* D, *on abaisse des normales à l'ellipse. Montrer que le quadrilatère des pieds des normales est un trapèze dont les bases sont parallèles à une diagonale du rectangle des axes.*

Lorsque le point M *se déplace sur la droite* D, *les côtés non parallèles et les diagonales du trapèze enveloppent une hyperbole équilatère, et le lieu des pôles de ces droites, par rapport à l'ellipse, est aussi une hyperbole équilatère.* (E.-N. Barisien.)

Prenons pour axes les diamètres conjugués égaux de l'ellipse (E), l'angle yox étant l'angle obtus formé par ces diamètres. L'équation de (E), dans ce système, est :

$$E = 2(x^2 + y^2) - (a^2 + b^2) = 0.$$

L'équation de l'hyperbole d'Apollonius du point M (x_0, y_0) sera :

$$\varphi = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2) - [(a^2 - b^2)x_0 - (a^2 + b^2)y]x \\ - [(a^2 + b^2)x_0 - (a^2 - b^2)y]y = 0.$$

Et si M est sur la droite D perpendiculaire en O à Oy, on a

$$(a^2 + b^2)x_0 - (a^2 - b^2)y_0 = 0.$$

D'où $\quad \varphi = (a^2 - b^2)^2(x^2 - y^2) + 4a^2b^2x_0x = 0.$

La parabole passant par les quatre points d'incidence des normales sera représentée par : $F = E + \lambda\varphi = 0$, si λ est choisi de telle sorte que les termes du second degré forment un carré parfait.

On trouve $\lambda c^4 = \pm 2$. En prenant le signe +, on a

$$F = 4x^2 + \frac{8}{C^4}a^2b^2x_0x - (a^2 + b^2) = 4(x - u_1)(x - u_2) = 0,$$

avec

$$u_1 + u_2 = -\frac{2a^2b^2}{c^4}x_0;$$

$$(1) \qquad u_1u_2 = -\frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Ainsi, le quadrilatère ABCD des points d'incidence des normales passant par un point M de la perpendiculaire D en O à la diagonale δ, est un trapèze dont les bases sont parallèles à l'autre diagonale δ'.

2° Soient $A(x = \alpha, y = \beta)$ l'un quelconque des sommets du trapèze; (x_1, y_1) les coordonnées du sommet C (ou D) non situé sur la base passant par A (C et D ne différant pas au point de vue analytique). Le lieu des pôles de AC ou de AD sera déterminé par les équations :

$$\left\{\begin{aligned} &2(\alpha x + \beta y) - (a^2 + b^2) = 0, \\ &2(\alpha^2 + \beta^2) - (a^2 + b^2) = 0, \\ &2(x_1 x + y_1 y) - (a^2 + b^2) = 0, \\ &2(x_1^2 + y_1^2) - (a^2 + b^2) = 0, \\ &\alpha x_1 = u_1 u_2 = -\frac{a^2 + b^2}{4}. \end{aligned}\right.$$

En éliminant β entre les deux premières, y_1 entre les deux suivantes, on voit que α et x_1 sont racines de l'équation :

$$4(x^2 + y^2)\zeta^2 - 4(a^2 + b^2)x\zeta + (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 2y^2) = 0.$$

α et x_1 sont en général différents, donc

$$\alpha x_1 = -\frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 2y^2}{4(x^2 + y^2)}$$

ou $$f = x^2 - y^2 + a^2 - b^2 = 0,$$

et les pôles des côtés non parallèles et des deux diagonales décrivent, quand M parcourt la droite D, l'hyperbole équilatère f, telle que les axes de E en sont les asymptotes.

L'enveloppe des côtés non parallèles et des diagonales qui est la polaire réciproque de f par rapport à E, est donc aussi une hyperbole équilatère. Elle admet donc les axes de E comme asymptotes; son équation est :

$$4(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) + (a^2 + b^2)^2 = 0,$$

Il est inutile d'ajouter qu'on raisonnerait de même pour l'autre diagonale.

QUESTION 338

Solution (*).

1° L'équation barycentrique

$$\sum \alpha(\lambda_0^2 - \lambda_1^2) = K\sigma$$

dans laquelle on suppose $\sigma = \sum \alpha$, *représente une droite perpendiculaire à* M_0M_1 ; *les quantités* $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \lambda_1, \ldots$ *étant les coordonnées tripolaires de* M_0 *et* M_1.

2° Soit d *la distance du milieu de* M_0M_1 *au point d'intersection* P *des deux droites, cette distance étant regardée comme positive dans le sens* MM_1. *On a :*

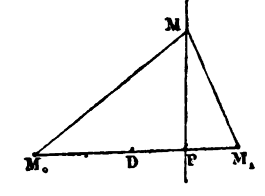
$$d = \frac{K}{2M_0M_1}.$$

(Aug. Poulain.)

La perpendiculaire en P est le lieu des points tels que

$$\overline{MM}_0^2 - \overline{MM}_1^2 = \overline{PM}_0^2 - \overline{PM}_1^2.$$

Or, on a (*J. S.* 1889, p. 8), dans ma Note sur les tripolaires,



$$\overline{MM_0}^2 = \frac{\Sigma\alpha(\lambda_0^2 - \lambda^2)}{\sigma},$$

$$\overline{MM_1}^2 = \frac{\Sigma\alpha(\lambda_1^2 - \lambda^2)}{\sigma}.$$

La relation devient donc

$$\frac{\Sigma\alpha(\lambda_0^2 - \lambda^2) - \Sigma\alpha(\lambda_1^2 - \lambda^2)}{\sigma} = \left(\frac{M_0M_1}{2} + d\right)^2 - \left(\frac{M_0M_1}{2} - d\right)^2$$

ou

$$\Sigma\alpha(\lambda_0^2 - \lambda_1^2) = d\sigma M_0M_1.$$

Remarque. — Les coordonnées tripolaires figurent ici à titre de données auxiliaires. Mais on peut s'en débarrasser, en remplaçant $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \lambda_1 \ldots$ au moyen de leurs différentes valeurs données (*J. S.*, 1889, p. 130), par exemple, on a

$$\lambda_0^2 - \lambda_1^2 = \frac{y_0^2 - y_1^2 + z_0^2 - z_1^2 + 2\cos A(y_0z_0 - y_1z_1)}{\sin^2 A}.$$

L'équation ci-dessus a aussi l'avantage de mettre en évidence la distance *d*.

(*) Nous n'avons pas reçu de solution de cette question. Celle-ci est de M. Poulain, qui avait proposé la question.

QUESTIONS PROPOSÉES

375. — Une corde AB d'une parabole donnée pivote autour du foyer F. Les normales en A et B se rencontrent en P et coupent la parabole en deux autres points A' et B'.

Montrer que :

1° Les droites AB et A'B' sont parallèles;

2° Le lieu du point P est une parabole;

3° La droite A'B' enveloppe une parabole.

(E.-N. Barisien.)

376. — On considère un point quelconque M situé sur une ellipse donnée et une corde AB telle que cette corde et la tangente en M soient également inclinées sur les axes de l'ellipse, l'une en sens inverse de l'autre. Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MAB est une ellipse, à condition que le segment de la corde AB intercepté entre les axes de l'ellipse soit dans un rapport constant avec le segment analogue intercepté sur la tangente en M.

(E.-N. Barisien.)

377. — D'un point quelconque P pris sur la normale en un point donné A d'une ellipse (E), on peut mener à cette ellipse trois autres normales dont les pieds sont B, C, D.

1° Si le point P se déplace sur la normale en A, le centre du cercle circonscrit au triangle BCD décrit une droite (Δ) ;

2° Dans le même cas, le quatrième point de rencontre du cercle BCD avec l'hyperbole d'Apollonius relative au point P décrit une autre droite (Δ');

3° Si le point A se déplace sur l'ellipse (E), la droite (Δ) est normale à une autre ellipse (E');

4° Les quatre droites, telles que (Δ), relatives aux quatre normales PA, PB, PC, PD, concourent en un même point.

(E.-N. Barisien.)

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 20110-9-93.

CUBIQUES CIRCULAIRES

TANGENTES, NORMALES. QUADRATURES DES CUBIQUES PARTICULIÈRES

Par M. **Jan Cyane**, ancien élève de l'École Polytechnique.

Dans mon étude précédente, j'ai laissé au lecteur le soin facile de chercher à quelles conditions particulières des définitions correspondent les diverses espèces de cubiques circulaires, et aussi quelles constructions particulières en résultent pour les normales et les tangentes.

On sait qu'il y a de ces cubiques dont le point double a ses deux tangentes imaginaires, ou confondues (*cissoïdes*), ou réelles. Dans ce dernier cas, si ces tangentes sont perpendiculaires, on a les *strophoïdes*.

Je vais reprendre l'étude détaillée des cissoïdes et des strophoïdes, en n'insistant que sur les générations les plus simples et les moins connues.

Cissoïdes.

A. — Définissons-les au moyen de leurs cercles Γ_i ou Γ_j qui sont confondus en un seul que nous appellerons Γ_{ij} (*fig. 1*).

Un angle constant $\widehat{ROM}$ tourne autour d'un point fixe O de ce cercle; par le point R où OR rencontre la circonférence Γ_{ij}, menons la droite RM, perpendiculaire au rayon du point O. Le point M, où cette droite rencontre le second côté OM de l'angle constant, décrit une cissoïde.

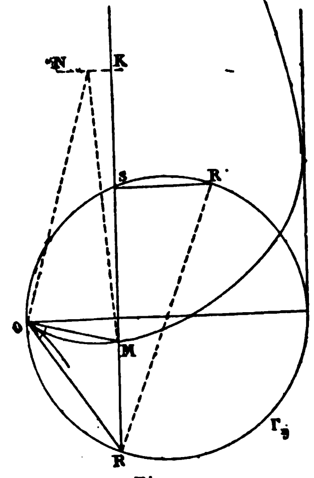


Fig. 1.

Cette cissoïde est droite et symétrique, lorsque l'angle constant $\widehat{ROM}$ est droit.

Normale. — On sait la construire d'après cette définition. Sa projection MK, sur la droite RM, de direction constante, est égale à la projection de la normale RR′ de la circonférence lieu de R, projection qui n'est autre que la corde RS.

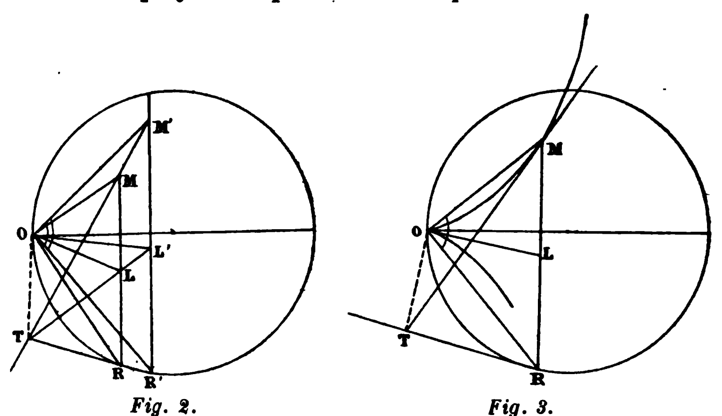


Fig. 2. *Fig. 3.*

Prenons donc, sur RM, une longueur MK = RS; élevons en K la perpendiculaire KN qui rencontre, en N, la perpendiculaire, en O, à OM. La droite MN est la normale cherchée.

Tangente de la cissoïde droite. — L'angle $\widehat{ROM}$ étant droit, soit L le milieu de l'hypoténuse RM.

On a : OL = LM = LR. *(fig. 2 et 3).*

Soit R′OM′ une position voisine de la figure et soit encore L′, tel que :

$$OL' = L'M' = L'R'.$$

Les trois cordes RR′, MM′ et LL′ sont alors concourantes en un point T, et l'on a, par les triangles semblables :

$$\frac{TL}{TL'} = \frac{LM}{L'M'} = \frac{OL}{OL'}.$$

En égalant les deux rapports extrêmes, on en conclut que le point T est sur la bissectrice extérieure OT du triangle OLL′.

Si RR′ est infiniment petit, LL′ l'est aussi, et la bissectrice OT se confond avec la perpendiculaire à OL. Les tangentes RR′, MM′ et LL′ concourent au point limite T.

Cela donne la construction suivante de la tangente à la cissoïde droite *(fig. 2)*. On prend le milieu de RM, on trace OL, et l'on élève la perpendiculaire OT à OL; puis on mène la tangente RT au cercle. Le point de concours T de ces deux droites OT et RT est un point de la tangente cherchée.

Remarque. — La construction de la tangente à la courbe lieu de M serait la même, si, la droite RM restant parallèle à elle-même, le point R décrivait une courbe quelconque.

Quadrature de la cissoïde droite. — Soit R'OM' une position de la figure génératrice, infiniment voisine de ROM *(fig. 4)*.

Comparons les aires élémentaires du trapèze RMM'R' et du triangle ROR'.

Soit MM' une parallèle égale à RR', le point M'' étant sur R'M'. L'aire MM''M' est du second ordre et négligeable devant l'aire du parallélogramme RMM''R', auquel nous pouvons alors réduire le trapèze.

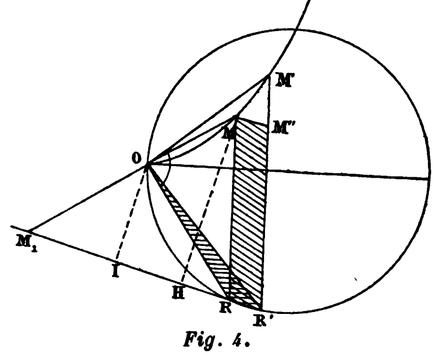


Fig. 4.

Ce parallélogramme a même base RR' que le triangle ROR'. Soient MH et OI les hauteurs correspondantes : l'angle $\widehat{ROM}$ étant droit et OR étant bissectrice de l'angle MRM_1, on a, dans le triangle isoscèle MRM_1 :

$$\frac{M_1O}{MM_1} = \frac{1}{2} = \frac{OI}{MH}.$$

Ainsi le parallélogramme a même base que le triangle et une hauteur MH double de la hauteur OI. Donc l'aire du parallélogramme est quadruple de celle du triangle et

$$\text{aire } RMM'R' = 4 \text{ aire } ROR'.$$

Intégrons ces deux aires à partir du point O. L'aire $O\rho RM\mu O$ balayée par RM sera aussi quadruple de l'aire $O\rho RO$ balayée par le vecteur OR *(fig. 5)*.

Remarque I. — En particulier, l'aire $ORDZM\mu O$, comprise entre le demi-cercle ORD, la demi-asymptote DZ et la demi-

cissoïde ZMO, est le quadruple de l'aire du demi-cercle. En retranchant le demi-cercle ORD, on trouve donc que la moitié de l'aire comprise entre la courbe et son asymptote, équivaut à trois fois le demi-cercle.

Remarque II. — Cherchons encore l'aire balayée par le vecteur OM, à partir du point O.

Soit *(fig. 4)* R'OM' une figure infiniment voisine de la figure génératrice ROM. Et évaluons la variation élémentaire de l'aire du triangle ROM. Nous aurons :

(1) d tri ROM = aire MOM' + aire RMM'R' − aire ROR';

ou

(2) $\left\{ \begin{array}{l} d \text{ tri ROM} = \text{aire MOM'} \\ \quad + 3.\text{aire ROR'}, \end{array} \right.$

puisque

aire RMM'R' = 4. aire ROR'.

De l'égalité (2) on déduit :

(3) $\left\{ \begin{array}{l} \text{aire MOM'} = d \text{ aire tri ROM} \\ \quad - 3.\text{ aire ROR'}. \end{array} \right.$

Intégrons maintenant les aires du point O jusqu'au point M, et nous aurons *(fig. 5)* :

(4) $\left\{ \begin{array}{l} \text{aire segm O}\mu\text{M} = \text{aire tri} \\ \text{ORM} - 3.\text{ aire segm O}\rho\text{R}. \end{array} \right.$

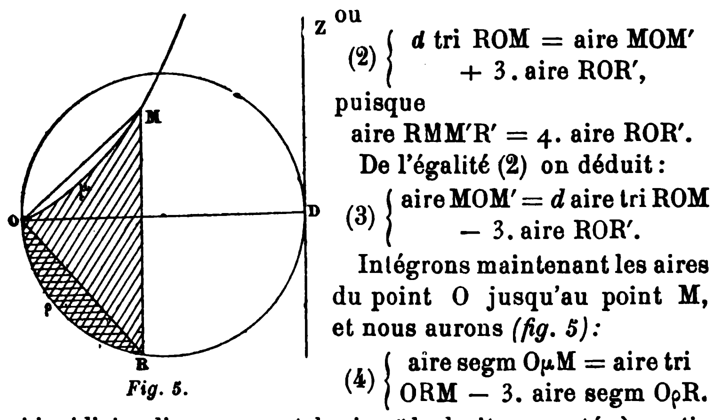


Fig. 5.

Ainsi l'aire d'un segment de cissoïde droite, comptée à partir du point double, est équivalente à l'aire d'un triangle, moins trois fois l'aire d'un segment de cercle.

B. *Autre génération des cissoïdes.* — Étant donnés *(fig. 6)* un cercle de centre C et un point fixe O sur ce cercle, on considère une tangente mobile TM et un angle constant TOM qui tourne autour de son sommet O, de manière qu'un de ses côtés OT passe constamment par le point de contact T de la tangente mobile. Le point M, intersection de son second côté avec la tangente, décrit une cissoïde.

La cissoïde est droite lorsque l'angle constant est droit.

Dans ce mouvement la vitesse angulaire de la tangente mobile est double de celle du vecteur OM.

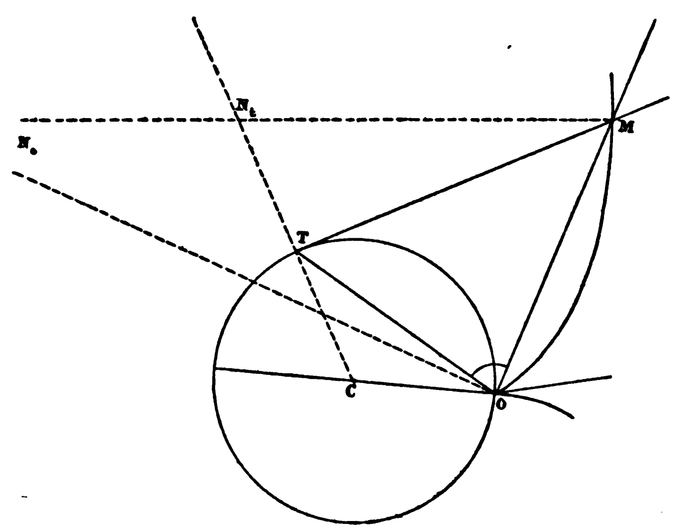


Fig. 6.

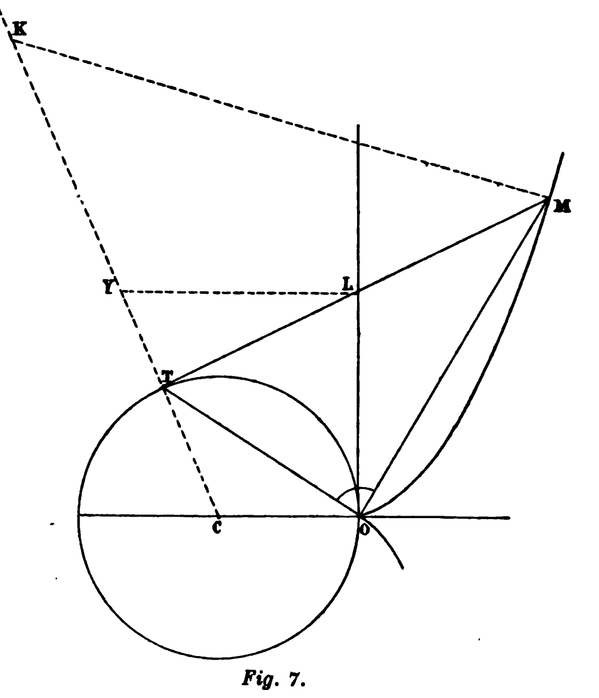


Fig. 7.

Normale. — Il en résulte que la normale en M est divisée dans le rapport inverse $\frac{1}{2}$ des vitesses angulaires, par les deux sous-normales en T et en O, et par le point d'incidence M, c'est-à-dire qu'on a :

$$\frac{MN_t}{MN_0} = \frac{1}{2}.$$

Normale à la cissoïde droite. — Menons en O (*fig. 7*) la tangente au cercle, et soit L son intersection avec TM. L'angle

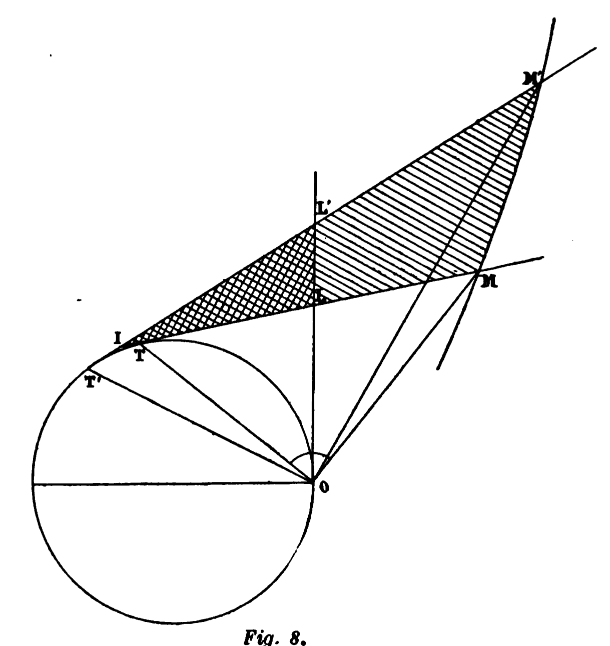


Fig. 8.

$\widehat{TOM}$ étant droit et les angles $\widehat{LTO}$ et $\widehat{LOT}$ étant égaux, il en résulte que :

$$LO = TL = LM.$$

Ainsi le rapport de division $\frac{ML}{MT}$ est constant et égal à $\frac{1}{2}$.

Dès lors, la sous-normale en T (c'est-à-dire la perpendiculaire TC à TM) est divisée, dans le même rapport, par les normales en M, en L et en T.

[illegible] la droite OL, [illegible] ontre TC. [illegible] conférence) se [illegible] encontre celle- [illegible]

[illegible] γ, une lon- [illegible] pour avoir, en K, [illegible] M. En effet,

[illegible]

[illegible] M′ *(fig. 8)* une

M

[illegible] M au cercle, et [illegible] la limite, avec

[illegible] angles IMM′ et [illegible]

[illegible]

[illegible]

et comme $IM = 2\,IL$, on a encore :

(1) $$\text{aire } IMM' = 4 \text{ aire } ILL'$$

Sommons, du point O au point M (*fig.* 9), les aires balayées par les vecteurs tangentiels TM et TL, et nous aurons, d'après l'égalité élémentaire (1) :

(2) $$\text{aire } O\tau TM\mu O = 4 \times \text{aire } O\tau TLO.$$

Remarque. — On déduit de là, facilement, que l'aire du segment $O\mu M$ est égale à celle du triangle OMT diminuée de trois fois celle du segment $O\tau T$.

Au fond, cette propriété est identique à celle qui correspond à la relation (4) trouvée, par la première méthode.

(A suivre.)

CONSTRUIRE LES AXES D'UNE ELLIPSE
CONNAISSANT DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS, EN POSITION ET EN GRANDEUR

Par M. C. Margerie.

Soient OA, OB, deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse. Si $OB' = OB$, les diagonales OC, AB' ont leurs directions conjuguées, dans la même ellipse.

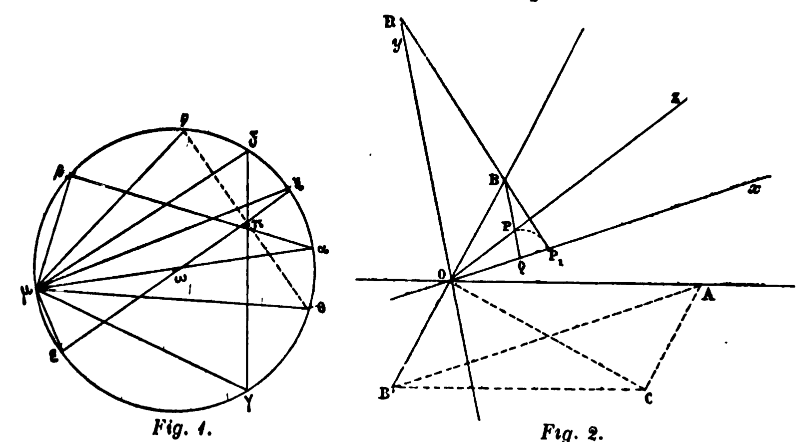


Fig. 1. *Fig.* 2.

Si (*fig.* 1), par un point μ d'une circonférence quelconque ω du plan, on mène $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\delta$, $\mu\gamma$, respectivement parallèles

à OA, OB, B'A, CO, les cordes $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ se coupent en un point π, et les droites qui joignent les extrémités de deux cordes issues de μ et parallèles à deux diamètres conjugués de l'ellipse, passent par le point π (théorème de Frégier).

$\varepsilon\xi$ étant le diamètre passant par π, $\mu\varepsilon$ et $\mu\xi$ sont les directions des axes. Nous aurons donc les axes, en position, en menant Oy et Ox parallèles à $\mu\varepsilon$ et $\mu\xi$. Ox étant dans l'angle aigu BOA est la direction du grand axe. Traçons la corde $\eta\theta$ perpendiculaire à $\varepsilon\xi$: $\mu\eta$ et $\mu\theta$ sont les directions des diamètres conjugués égaux de l'ellipse.

Soient *(fig. 2)* OZ parallèle à $\mu\eta$; BQ perpendiculaire à ox qui rencontre OZ en P : $\frac{PQ}{OQ} = \frac{b}{a}$. Prenons $QP_1 = QP$ et traçons P_1BR. On a

$$\frac{P_1B}{BR} = \frac{P_1Q}{QO} = \frac{b}{a}.$$

Comme B est un point de l'ellipse, BP_1 est la longueur du demi-petit axe, et BR celle du demi-grand axe.

UNE TRANSFORMATION
DES FIGURES DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

par Mme Veuve F. Prime.

1. Soit (*) $$C \equiv \frac{l_1}{\alpha} + \frac{m_1}{\beta} + \frac{n_1}{\gamma} = 0,$$

l'équation d'une conique circonscrite au triangle de référence ABC. Cette conique admet, pour pôle d'homologie, le point

$$P \equiv \frac{\alpha}{l_1} = \frac{\beta}{m_1} = \frac{\gamma}{n_1}$$

et, pour centre, le point dont les coordonnées l_2, m_2, n_2, vérifient les relations

(1) $$m_1n_2 + n_1m_2 = n_1l_2 + l_1n_2 = l_1m_2 + m_1l_2$$

Ces relations ne changent pas quand on permute les indices 1, 2 ; il en résulte que *le pôle d'homologie et le centre d'une conique circonscrite au triangle de référence, engendrent des lieux réversibles.*

(*) Cet article est écrit en coordonnées barycentriques.

On peut encore dire que *si deux coniques circonscrites au triangle de référence sont telles que le centre de l'une soit le pôle d'homologie de l'autre, le centre de celle-ci sera le pôle d'homologie de la première.*

2. Mettons les relations (1) sous la forme

$$\frac{l_1}{l_2(l_2 - m_2 - n_2)} = \frac{m_1}{m_2(m_2 - n_2 - l_2)} = \frac{n_1}{n_2(n_2 - l_2 - m_2)};$$

elles définissent alors une transformation par laquelle le point

(2) $$\varpi_1 \equiv l, m, n$$

est substitué au point

3) $$\varpi_2 \equiv l(l - m - n), \quad m(m - n - l), \quad n(n - l - m).$$

3 Ainsi, le point de Lemoine K a pour transformé le centre O de la circonférence circonscrite; il est le pôle d'homologie de la circonférence circonscrite et le centre de la conique

$$\sum \frac{\sin 2A}{\alpha} = 0.$$

Cette conique est la transformée par points inverses de l'axe orthique; elle coupe la circonférence circonscrite au point harmoniquement associé au diamètre de Brocard.

4. **Théorème.** — *Les anticomplémentaires ϖ'_1, ϖ'_2 des points ϖ_1, ϖ_2 sont réciproques.*

En effet, si α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2 sont les coordonnées des points ϖ'_1, ϖ'_2, on a

$$\varpi'_2 \equiv \frac{\alpha_1}{m + n - l} = \frac{\beta_1}{n + l - m} = \frac{\gamma_1}{l + m - n}.$$

et $$\varpi'_2 \equiv \alpha_2(m + n - l) = \beta_2(n + l - m) = \gamma_2(l + m - n),$$

d'où $$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 = \gamma_1\gamma_2.$$

5. Lorsque le point ϖ_1 décrit la droite

(4) $$\Delta \equiv L\alpha + M\beta + N\gamma = 0,$$

son transformé ϖ_2 engendre la conique

(5) $$\Gamma \equiv \Sigma L\alpha^2 - \Sigma(M + N)\beta\gamma = 0.$$

La conique Γ rencontre le côté $BC \equiv \alpha = 0$ du triangle, de référence aux mêmes points que les droites, issues de A, dont le faisceau correspond à

$$(\beta - \gamma)(M\beta - N\gamma) = 0.$$

Elle est donc circonscrite au triangle complémentaire, elle contient les pieds des droites qui joignent les sommets du triangle de référence au point

(6) $$\delta \equiv L\alpha = M\beta = N\gamma,$$

harmoniquement associé à la droite Δ, et elle passe par les milieux des segments $A\delta$, $B\delta$, $C\delta$. On pourrait donc l'appeler la conique des neuf points relative au point δ ou à la droite Δ.

6. Si la droite Δ est l'axe orthique et δ, l'orthocentre du triangle ABC, la conique Γ est confondue avec la circonférence des neuf points de ce triangle. Cette proposition résulte immédiatement de ce qui précède; en voici d'ailleurs une vérification analytique.

On sait que si u, v, w sont les puissances des sommets A, B, C du triangle de référence par rapport à une circonférence donnée, l'équation de cette circonférence peut s'écrire

$$\Sigma\alpha.\Sigma u\alpha - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

Il en résulte que l'équation (5) représentera une circonférence si

$$\frac{L}{u} = \frac{M}{v} = \frac{N}{w} = \frac{M+N}{a^2 - v - w} = \frac{N+L}{b^2 - w - u} = \frac{L+M}{c^2 - u - v}.$$

Ces relations donnent

$$L = u = bc.\cos A \equiv \frac{\cos A}{a} \equiv \text{ctg } A,$$

$$M = v = c.a.\cos B \equiv \frac{\cos B}{b} \equiv \text{cotg } B,$$

$$N = w = a.\, b.\cos C \equiv \frac{\cos C}{c} \equiv \text{cotg } C$$

d'où
$$\Delta \equiv \Sigma\alpha.\text{cotg } A = 0,$$
$$\delta \equiv \alpha.\text{cotg } A = B.\text{cotg } B = \gamma.\text{cotg } C,$$
$$\Gamma \equiv \Sigma\alpha^2 bc\cos A - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

On reconnaît que Δ est l'axe orthique, δ, l'orthocentre et Γ, la circonférence des neuf points; donc, *lorsque le centre d'une conique circonscrite à un triangle de référence décrit l'axe orthique, le pôle d'homologie engendre la circonférence des neuf points, et réciproquement.*

7. Il est assez intéressant de rechercher l'enveloppe de la conique

$$C \equiv \frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = 0$$

et de l'axe d'homologie

$$D \equiv \frac{\alpha}{l} + \frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{n} = 0$$

lorsque le pôle d'homologie parcourt la droite

$$\Delta \equiv L\alpha + M\beta + N\gamma = 0.$$

Observons à cet effet que Δ coupe le côté $AC \equiv \beta = 0$, au point $\frac{1}{L}$, 0, $-\frac{1}{N}$; et le côté $AB \equiv \gamma = 0$, au point $\frac{1}{L}$, $-\frac{1}{M}$, 0; les coordonnés d'un point quelconque de Δ peuvent donc s'écrire

$$\frac{1+k}{L}, \; -\frac{k}{M}, \; -\frac{1}{N}.$$

L'équation de C est alors

$$\frac{1+k}{L\alpha} - \frac{k}{M\beta} - \frac{1}{N\gamma} = 0,$$

ou

$$\left(\frac{1}{L\alpha} - \frac{1}{N\gamma}\right) + k\left(\frac{1}{L\alpha} - \frac{1}{M\beta}\right) = 0.$$

La conique C passe donc par le point fixe

$$\delta \equiv L\alpha = M\beta = N\gamma$$

harmoniquement associé à la droite Δ.

Quant à D, son équation est

$$\frac{L\alpha}{1+k} - \frac{M\beta}{k} - \frac{N\gamma}{1} = 0$$

ou

$$k^2 N\gamma + k(-L\alpha + M\beta + N\gamma) + M\beta = 0.$$

Il en résulte que D enveloppe la conique

$$d \equiv (-L\alpha + M\beta + N\gamma)^2 - 4MN\beta\gamma = 0$$

ou

$$d \equiv \Sigma L^2\alpha^2 - 2\Sigma MN\beta\gamma = 0.$$

Cette conique est tangente aux côtés du triangle de référence, les points de contact sont les pieds des droites $A\delta, B\delta, C\delta$.

Nous pouvons donc, pour résumer tout ce que nous avons dit jusqu'à présent, énoncer le théorème suivant :

Lorsque le pôle d'homologie d'une conique C, *circonscrite au triangle de référence décrit la droite* Δ, *la conique* C *passe,*

par le point δ harmoniquement associé à cette droite, le centre décrit la conique des neuf points, relative à $\delta\Delta$, et l'axe d'homologie enveloppe la conique inscrite au triangle de référence et pour laquelle δ et Δ sont le pôle et l'axe d'homologie.

8. Cas particuliers. — *1° Si le pôle d'homologie décrit l'axe orthique, le centre se meut sur la circonférence des neuf points, la conique passe par l'orthocentre et l'axe d'homologie enveloppe la conique* K (*);

2° Si l'on considère toutes les coniques qui, étant circonscrites au triangle de référence, passent par le point de Gergonne, leur axe d'homologie enveloppe la circonférence inscrite;

3° Si les coniques passent par le point de Lemoine, l'axe d'homologie enveloppe l'ellipse de Brocard et le pôle d'homologie engendre la droite de Lemoine;

4° Si les coniques passent par le premier centre isogone, l'axe d'homologie enveloppe l'ellipse de Simmons.

5° Si l'on considère toutes les coniques qui, étant circonscrites au triangle de référence, contiennent le centre de gravité de ce triangle, leur axe d'homologie enveloppe l'ellipse

$$\sum \sqrt{ax} = 0,$$

tangente aux milieux des côtés du triangle de référence.

9. Le théorème précédent (n° 7) permet de considérer la quatrième tangente commune à deux coniques inscrites au triangle de référence comme la droite harmoniquement associée au point d'intersection des droites harmoniquement associées aux pôles d'homologie de ces coniques; ou encore comme la transversale réciproque de la droite qui joint les réciproques des pôles d'homologie.

10. Il donne encore cette conséquence : *le lieu des pôles d'homologie des coniques inscrites au triangle de référence et tangentes à une même droite est la conique circonscrite au triangle de référence ayant cette droite pour axe d'homologie.*

(*) Voir *Premier inventaire de la géométrie du triangle*, par M. Vigarié (Congrès de Toulouse).

Cette propriété est la conséquence immédiate du théorème établi au n° 7, mais elle en est aussi la transformée par la méthode des polaires réciproques. Car, par rapport à l'ellipse $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$, la conique C a pour transformée une conique C', inscrite au triangle de référence, et tangente à la transversale réciproque de Δ; et, à l'axe d'homologie de la conique C, correspond le pôle d'homologie de C'. L'axe d'homologie de C enveloppant une conique inscrite au triangle de référence, le pôle d'homologie de C' engendre une conique circonscrite à ce triangle.

11. Si $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sont les coordonnées du centre de la conique Γ (n° 5), on a

$$\begin{aligned} & 2L\mathcal{L} - (L+M)\mathcal{M} - (L+N)\mathcal{N} \\ = {} & 2M\mathcal{M} - (M+N)\mathcal{N} - (M+L)\mathcal{L} \\ = {} & 2N\mathcal{N} - (N+L)\mathcal{L} - (N+M)\mathcal{M}. \end{aligned}$$

Ces relations peuvent s'écrire:

$$\frac{\mathcal{L}}{\frac{2}{L}+\frac{1}{M}+\frac{1}{N}} = \frac{\mathcal{M}}{\frac{2}{M}+\frac{1}{N}+\frac{1}{L}} = \frac{\mathcal{N}}{\frac{2}{N}+\frac{1}{L}+\frac{1}{M}},$$

et aussi

$$L(3\mathcal{L} - \mathcal{M} - \mathcal{N}) = M(3\mathcal{M} - \mathcal{N} - \mathcal{L}) = N(3\mathcal{N} - \mathcal{L} - \mathcal{M}).$$

Ainsi les points $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$; $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{M}$, $\frac{1}{N}$ décrivent des courbes de même degré.

12. Si L, M, N sont les coordonnées d'un point de l'ellipse de Steiner,

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{M} + \frac{1}{N} = 0,$$

et le lieu du centre de Γ est la droite de l'infini, qui correspond à l'équation

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

On voit par là que *le lieu du centre (ou du pôle d'homologie d'une conique circonscrite au triangle de référence dont le pôle d'homologie (ou le centre) décrit la transversale réciproque d'une droite harmoniquement associée à un point de l'ellipse de Steiner, est une parabole circonscrite au triangle complémentaire et dont les diamètres aboutissent au réciproque du point considéré sur l'ellipse de Steiner.*

13. Lorsque ce point est le point de Steiner :

$$L(b^2 - c^2) = M(c^2 - a^2) = N(a^2 - b^2),$$

le centre engendre la parabole dont l'équation est

$$\Sigma\alpha^2(c^2 - a^2)(a^2 - b^2) + \Sigma(b^2 - c^2)^2\beta\gamma = 0$$

et le pôle d'homologie, la droite

$$\sum \frac{\alpha}{\sin A . \sin (B - C)} = 0,$$

laquelle est la transversale inverse du diamètre de Brocard.

14. Si le point $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ engendre l'ellipse de Steiner, le lieu du point $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{M}$, $\frac{1}{N}$ a pour équation

$$\sum \frac{1}{2\alpha + \beta + \gamma} = 0$$

ou

$$5\Sigma\alpha^2 + 11\Sigma\beta\gamma = 0.$$

Cette conique est une ellipse concentrique et homothétique à l'ellipse de Steiner, le rapport d'homothétie étant égal à 4.

Quant au point L, M, N, il engendre la quartique

$$5\Sigma\beta^2\gamma^2 + 11\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha = 0.$$

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

La géomètrie du mouvement, Exposé synthétique, *par le Dr Arthur Schœnflies*, professeur à l'université de Gœttingen; traduit de l'allemand par *Ch. Speckel,* capitaine du génie. — Édition revue et corrigée par l'auteur, suivie de notions géométriques sur les complexes et les congruences de droites, par *G. Fouret,* Examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique. — In-8° avec 27 figures; 1893. Prix : 6 fr. 50 c.

EXTRAIT DE LA PRÉFACE

La *Géométrie du mouvement,* appelée aussi *Géométrie cinématique,* n'a pas été, jusqu'ici, exposée dans son ensemble. Dans cet ouvrage, je me suis proposé de faire une telle exposition et de compléter la science en quelques points importants, je crois.

Les recherches modernes qui ont trait à la Géométrie du mouvement ont, en général, comme point de départ, les notions de vitesse et d'accélération. Ce n'est pas là pourtant qu'il faut chercher la source de résultats purement géométriques, car la nature et les propriétés des formes géométriques engendrées par le déplacement ne dépendent pas de la vitesse plus ou moins grande avec laquelle se fait le déplacement, mais uniquement de la loi géométrique de ce mouvement, c'est-à-dire de la succession des positions occupées par le corps mobile.

A ce point de vue la géométrie du mouvement apparaît comme une branche de la Géométrie synthétique. *Chasles* et *Mannheim*, les fondateurs de cette science, ont été conduits par cette même idée. On la rencontre aussi dans l'ouvrage de Schell, *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, et je me plais à reconnaître que c'est précisément cet ouvrage qui fit germer en moi l'idée d'exposer la géométrie du mouvement d'une manière purement géométrique...

L'ouvrage qui est soumis au lecteur n'a pas la prétention de traiter d'une manière définitive de l'ensemble de la Géométrie du mouvement. Je me suis limité à une partie, la plus importante, celle qui a rapport au déplacement de systèmes invariables, lorsque chaque point décrit une courbe. Pour les autres mouvements, on n'a fait qu'établir les théorèmes principaux.

Les exemples servent à l'illustration de la théorie et n'ont pas pour but de donner une exposition complète de certains mécanismes...

Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, par MM. Jules Molk, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy, et Jules Tannery, sous-directeur des Études scientifiques à l'École Normale supérieure. Quatre volumes grand in-8°, se vendant séparément. — Tome Ier *Introduction. Calcul différentiel* (Ire Partie), 1893, 7 fr. 50 c. — Tome II *Calcul différentiel* (IIe Partie) *(Sous presse)*. — Tome III : *Calcul intégral (En préparation)*. — Tome IV : *Applications (En préparation)*: — (Librairie Gauthier-Villars.)

Extrait de la préface.

Nous désirons, avant tout, expliquer pourquoi nous avons osé écrire un livre sur les fonctions elliptiques, si peu de temps après la publication du Traité que l'on doit à Halphen. Il va sans dire que nous n'avons pas la prétention de remplacer ou d'égaler l'œuvre de ce maître; celle-ci est inachevée; mais la partie qui reste incomplète, qui était attendue avec impatience par ceux qui aiment la Science pour elle-même et pour sa beauté propre, n'aurait pu avoir qu'un nombre restreint de lecteurs, que peuvent contenter, dans une certaine mesure, les beaux fragments publiés par M. Stieltjes : il ne nous appartient pas de compléter l'œuvre d'Halphen.

C'est un livre beaucoup plus élémentaire que nous avons tenté d'écrire. ce sont les étudiants de nos Facultés que nous avions en vue : nous avons essayé de faire un livre qui se raccordât avec l'enseignement qui leur est donné; s'ils peuvent, après nous avoir lus, traiter des applications faciles et les pousser jusqu'au bout; si quelques-uns d'entre eux complètent eurs connaissances dans le livre d'Halphen, s'ils étudient en particulier les belles applications qui remplissent le second volume, s'ils se retrouvent sans peine dans les *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* que M. Schwarz publie d'après les leçons et les notations de M. Weierstrass, s'ils lisent les mémoires fondamentaux d'Abel et de Jacobi, s'ils pénètrent enfin dans la riche et admirable littérature des fonctions elliptiques et prennent en particulier connaissance des recherches de Kronecker et de M. Hermite, nous aurons entièrement atteint notre but. (*)

(*) On trouvera dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (août, 1893; p. 205), une analyse très détaillée de cet ouvrage, faite par M. H. Andoyer.

EXERCICE ÉCRIT

73. — On donne une quadrique Q, de première classe, rapportée à ses axes et correspondant à l'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Autour d'un point fixe M_0 (x_0, y_0, z_0), on fait tourner une droite Δ. Par Δ′, on peut mener à Q deux plans tangents. Soient P, P′ les points de contact.

1° Quel est le lieu décrit par le milieu de PP′, quand Δ reste parallèle au plan des xy?

2° Ce lieu est une conique Γ. Trouver le lieu décrit par M_0 quand :

a) Γ est une conique dégénérée,
b) Γ est une parabole,
c) Γ est une hyperbole équilatère,
d) Γ est une circonférence.

Solution de l'exercice écrit 72.

Nous supposerons les circonférences extérieures l'une à l'autre. Soient A et B les centres des cercles (A) et (B), dont les rayons sont R et R′. Soit C le centre du cercle (Σ) dont le rayon est ρ. Soit aussi AB = D et R > R′. Désignons par S le point de rencontre des tangentes extérieures aux cercles (A) et (Σ), et par K le point de rencontre de la tangente intérieure avec l'une des tangentes extérieures aux mêmes cercles (A) et (Σ). Le lieu des points de rencontre des tangentes communes aux cercles (A) et (Σ) se compose donc du lieu des points S et du lieu des points K. Nous allons successivement étudier ces divers lieux.

1° *Lieu des points* S. — Prenons la droite AB pour axe polaire et le point A pour pôle. Posons $AS = r$ et $\widehat{SAB} = \theta$.

De ce que S est le centre de similitude des cercles de rayon R et ρ, on a

$$(1) \qquad r = \frac{R(R+\rho)}{R-\rho}.$$

D'autre part, dans le triangle CAB

$$\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 - 2CA.AB \cos\theta,$$

ou

$$(\rho + R')^2 = (\rho + R)^2 + D^2 - 2D(\rho + R)\cos\theta,$$

ou encore

$$(2) \qquad \rho = \frac{R^2 - R'^2 + D^2 - 2RD\cos\theta}{2D\cos\theta - 2(R - R')}.$$

Nous aurons l'équation polaire du point S, en éliminant ρ entre (1) et (2). Nous trouvons ainsi

$$(3) \qquad r = \frac{R[D^2 - (R-R')^2]}{4RD\cos\theta + R'^2 + 2RR' - 3R^2 - D^2}.$$

C'est l'équation d'une conique ayant un de ses foyers en A et la droite AB pour axe focal. Cette conique sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que

$$\frac{4RD}{D^2 + (R - R')(3R + R')} \begin{matrix} < \\ > \\ = \end{matrix} 1.$$

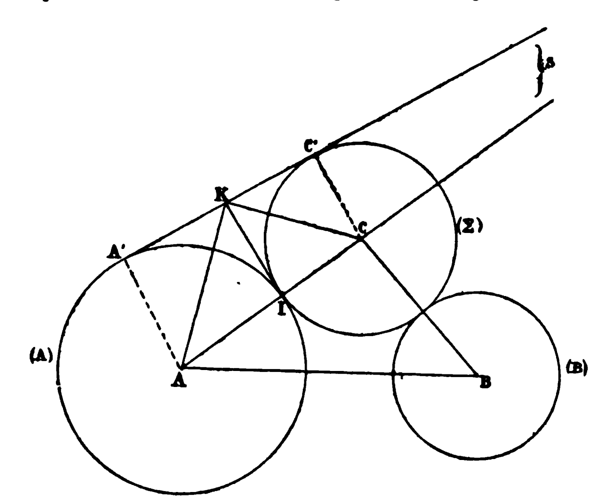
Elle sera une parabole, si

$$D^2 - 4RD + (R - R')(3R + R') = 0,$$

ou, en résolvant par rapport à D, si

$$D = 2R \pm \sqrt{(R + R')^2}.$$

La conique lieu de S sera donc une parabole, lorsque $D = 3R + R'$



ou $D = R - R'$. Elle ne sera une véritable parabole que pour $D = 3R + R'$. Son équation est alors

$$r = -\frac{R(R + R')}{(3R + R')\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

La conique sera donc une ellipse ou une hyperbole suivant que l'on a

$$[D - (3R + R')][D - (R - R')] \gtrless 0.$$

Elle sera une ellipse lorsque

$$D > 3R + R',$$

ou

$$D < R - R'.$$

Dans ce dernier cas, (B) sera à l'intérieur de (A), et l'ellipse sera toujours imaginaire.

La conique sera une hyperbole lorsque

$$3R + R' > D > R - R'.$$

Il est bien évident que le lieu du point S, relatif aux cercles (B) et (Σ), est aussi une conique ayant l'un de ses foyers en B.

Son équation polaire (le pôle étant en B), s'obtiendra en changeant,

dans (3), R en R′ et R′ en R. On obtient ainsi

(4) $$r = \frac{R'[D^2 - (R - R')^2]}{4R'D\cos\theta + R^2 + 2RR' - 3R'^2 - D^2}.$$

Cette conique sera une ellipse ou une hyperbole, suivant que

$$[D - (3R' + R)][D + R - R'] \gtrless 0.$$

Or, comme on a supposé $R > R'$, il en résulte que la seconde parenthèse est toujours positive. Si D surpasse $3R' + R$, cette seconde conique sera une ellipse. Si, au contraire, on suppose

$$D < 3R' + R,$$

la conique sera une hyperbole.

2° *Lieu des points* K. — Le point K est le milieu de la distance A′C′, A′ et C′ étant les points de contact de l'une des tangentes communes extérieures avec les cercles (A) et (Σ). Si I est le point de contact de (A) et (Σ), on a

$$KI = KA' = KC'.$$

Le triangle KAC est rectangle en K, et l'on a

$$\overline{KA}^2 = AC.AI,$$

si r désigne le rayon polaire AK. Donc

(5) $$r^2 = R(R + \rho).$$

Si, d'autre part, on désigne par θ' l'angle $\widehat{KAI}$ et par ω l'angle polaire $\widehat{KAB}$, on a

$$\theta = \omega - \theta'.$$

mais $$\operatorname{tg}\theta' = \frac{KI}{AI} = \frac{\sqrt{R\rho}}{R} = \sqrt{\frac{\rho}{R}}.$$

Donc $$\sin\theta' = \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{R + \rho}} \qquad \cos\theta' = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R + \rho}}.$$

Par suite,

$$\cos\theta = \cos(\omega - \theta') = \cos\omega\cos\theta' + \sin\omega\sin\theta',$$

ou $$\cos\theta = \frac{\sqrt{R}\cos\omega + \sqrt{\rho}\sin\omega}{\sqrt{R + \rho}}. \qquad (6)$$

On aura l'équation du lieu de K, en éliminant ρ et θ entre (2) (5) et (6). De (5), on tire

(7) $$\rho = \frac{r^2}{R} - R;$$

d'où, en portant dans (6)

(8) $$\cos\theta = \frac{R\cos\omega + \sqrt{r^2 - R^2}\sin\omega}{r}.$$

Les valeurs (7) et (8), portées dans (2), donnent l'équation polaire du lieu

$$2rD[R\cos\omega + \sqrt{r^2 - R^2}\sin\omega] - 2r^2(R - R') = R[D^2 - (R - R')^2]$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$[2(x^2 + y^2)(R - R') - 2DRx + R[D^2 - (R - R')^2]]^2 = 4D^2y^2(x^2 + y^2 - R^2, \quad (9)$$

c'est une quartique, dont deux directions asymptotiques sont les droites isotropes, et les deux autres ont pour coefficients angulaires

$$\pm\frac{(R - R')}{\sqrt{D^2 - (R - R')^2}}.$$

Le lieu du point K, relatif au cercle (B) et (Σ), est aussi évidemment une quartique.

Remarque. — Le lieu du point C, centre du cercle (Σ), est une hyperbole,

lorsque (A) et (B) ne sont pas intérieurs l'un à l'autre. On a alors

$$CA = R + \rho, \quad CB = R' + \rho;$$

donc

$$CA - CB = R - R' = \text{constante}.$$

Le lieu est donc une hyperbole de foyers A et B.

Si (B) est intérieur à (A),

$$CA = R - \rho, \quad CB = R' + \rho,$$
$$CA + CB = R + R'.$$

Le lieu de C est alors une ellipse, de foyers A et B.

(E.-N. Barisien.)

Notes sur l'exercice 69. (*)

Reproduisons d'abord l'énoncé de cet exercice :

On considère deux droites rectangulaires Ox, Oy. *Deux paraboles* P, P′ *touchent ces droites, respectivement, aux points*, A, B ; A′, B′.

On peut mener, aux paraboles P, P′, *une tangente commune* MM′ *que l'on suppose parallèle à la première ou à la seconde bissectrice de* yOx.

1° Démontrer que, dans cette hypothèse, le foyer de P *est situé sur* OM *et que le foyer de* P′ *est sur* OM′.

2° En supposant que P *soit fixe, trouver le lieu du foyer de* P′.

Posons $OA = a, \quad OB = b, \quad OA' = a', \quad OB' = b'.$

Rappelons d'abord que l'équation générale des paraboles tangentes en A à Ox et en B à Oy, est

$$(1) \qquad \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1.$$

Pour que cette parabole soit, en outre, tangente à une droite CD telle que $OC = \alpha$, $OD = \beta$, on a la relation

$$(2) \qquad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 1.$$

Premier cas. — La tangente CD *est parallèle à la bissectrice extérieure de l'angle* xoy.

Alors $\beta = \alpha$. La relation (2) devient

$$(3) \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\alpha}.$$

1° Je dis que le foyer F est sur la droite joignant le point O au point de contact M de CD avec la parabole P.

En effet, le point O appartient à la directrice de P : donc le foyer F est à l'intersection de AB avec la perpendiculaire abaissée de O sur AB. Les équations de OΓ et CD sont, respectivement :

$$ax - by = 0,$$
$$x + y = \alpha.$$

Les coordonnées du point de rencontre sont, par suite, en tenant compte de (3)

$$x = \frac{ab^2}{(a+b)^2}, \qquad y = \frac{a^2 b}{(a+b)^2}.$$

Or, ces coordonnées vérifient l'équation (1) de la parabole (P). Les droites OF et CD se rencontrent donc bien sur la parabole, en M.

Par conséquent, pour toutes les paraboles tangentes aux trois côtés du triangle COD, la propriété précédente est vraie.

(*) Il a été publié, p. 205, sous le titre d'exercice 69, un exercice autre que celui que nous donnons ici. L'erreur est sans importance, mais nous la signalons pourtant, pour éviter toute confusion.

2° Le foyer F′ de la parabole P′ est donc à l'intersection des droites A′B′ et de la perpendiculaire abaissée de O sur A′B′. Les équations de ces droites sont

$$(4)\qquad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1,$$

$$(5)\qquad \frac{x}{b'} = \frac{y}{a'}.$$

On a, de plus, la relation

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{\alpha};$$

laquelle, à cause de (3), devient

$$(6)\qquad \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Le lieu du foyer F′ s'obtiendra donc en éliminant $\frac{1}{a'}$ et $\frac{1}{b'}$ entre les trois équations (4) (5) et (6); l'équation du lieu s'obtient immédiatement sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ y & -x & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - (x + y) = 0;$$

ou encore, d'après la valeur (3) de α :

$$x^2 + y^2 - \alpha(x + y) = 0.$$

Le lieu du point F′ est donc la circonférence circonscrite au triangle COD. Ce résultat est d'ailleurs évident, puisque la circonférence circonscrite à COD, d'après une propriété connue, passe par F′.

2° *cas. — La tangente* CD *est parallèle à la bissectrice intérieure de l'angle* xoy,

Le second cas se traite de la même façon et conduit à un résultat analogue à celui que nous venons d'obtenir.

(E.-N. Barisien.)

Seconde solution par M. C. Grolleau, Répétiteur général au lycée de Marseille.

Soit
$$x + y = a,$$
l'équation d'une droite CD parallèle à la seconde bissectrice de l'angle des axes.

Posons $\quad OA = \frac{1}{u}, \ OB = \frac{1}{v};$ et $OA' = \frac{1}{u'}, \ OB' = \frac{1}{v'}.$

L'équation générale des coniques tangentes aux axes, en A et B, est :

$$(ux + vy - 1)^2 - 2\lambda\, xy = 0;$$

et l'on a une parabole pour $\lambda = 2uv$. Cette parabole est tangente à la droite CD si l'équation

$$\left(ux + vy - \frac{x + y}{a}\right)^2 - 4uvxy = 0,$$

a ses racines égales, c'est-à dire si l'on a

$$\left[\left(u-\frac{1}{a}\right)\left(v-\frac{1}{a}\right)-2uv\right]^2-\left(u-\frac{1}{a}\right)^2\left(v-\frac{1}{a}\right)^2=0.$$

Cette relation donne

(1) $$u+v=\frac{1}{a}.$$

L'équation des paraboles P est donc

(P) $$(ux-vy)^2-2(ux+vy)+1=0,$$

avec la condition (1).

L'équation des paraboles P′ est, de même,

(P′) $$(u'x-v'y)^2-2(u'x+v'y)+1=0,$$

avec la condition

(2) $$u'+v'=\frac{1}{a}.$$

1° Pour avoir l'équation de OM, il suffit de faire une combinaison homogène entre l'équation (P) et l'équation

$$x+y=a.$$

En tenant compte de (1), on a ainsi :

$$(ux-vy)^2-2(ux+vy)\frac{x+y}{a}+\frac{(x+y)^2}{a^2}=0,$$

ou, en ordonnant :

$$(au-1)^2x^2-2\left[uva^2+a(u+v)-1\right]xy+(av-1)^2y^2=0;$$

équation qu'on peut écrire, en tenant compte de (1), successivement sous les formes suivantes

$$(au-1)^2x^2-2a^2uvxy+(av-1)^2y^2=0,$$
$$[(au-1)x-(av-1)y]^2=0.$$

L'équation de OM est donc

$$y=\frac{au-1}{av-1}x, \qquad \text{avec la condition (1).}$$

Remarquons que le foyer de P se trouve sur AB et sur la perpendiculaire abaissée de O sur AB; la droite OM ne contiendra ce foyer que si elle est perpendiculaire sur AB. Il faut donc que l'on ait

$$\frac{au-1}{av-1}\cdot\frac{u}{v}=1;$$

ce que l'on peut écrire $$a(u^2-v^2)=u-v,$$
ou $$a(u+v)=1,$$

qui n'est autre que la relation (1). — On démontrerait de même que OM′ contient le foyer de P′.

2° Pour avoir le lieu du foyer de P′, en supposant P fixe, il suffit d'éliminer u', v' et a entre les quatre équations

$$u'x+v'y-1=0,$$
$$y(av'-1)=(au'-1)x,$$
$$u'+v'=\frac{1}{a},$$
$$u+v=\frac{1}{a}.$$

Le calcul n'offre pas de difficulté; on élimine a, ce qui donne les trois équations

$$u'x+v'y-1=0,$$
$$y(v'-u-v)=(u'-u-v)x,$$
$$u'+v'=u+v.$$

En éliminant v', on obtient

$$u'(x-y)+(u+v)y-1=0,$$
$$u'(x+y)=(u+v)x;$$

d'où l'on tire facilement

$$x^2+y^2-\frac{1}{u+v}(x+y)=0,$$

équation d'une circonférence passant par l'origine, et symétrique par rapport à la première bissectrice de yOx.

ÉCOLE CENTRALE

(2e Session 1893.)

Géométrie analytique.

On donne deux axes de coordonnées rectangulaires ox et oy et l'ensemble de deux droites $\lambda(y-b)^2+(x-a)^2=0$.

1° Formuler l'équation générale des coniques Δ qui admettent ces deux droites pour diamètres conjugués et qui, de plus, sont tangentes à l'axe des x.

Démontrer que, par un point quelconque du plan, on peut faire passer deux de ces coniques.

2° On considère les deux coniques Δ qui passent par un point (o,q) de l'axe des y, et on demande le lieu du point de concours des cordes de contact des tangentes menées de l'origine à ces deux coniques, quand on fait varier q. Ce lieu est une parabole P qui, si l'on fait varier λ, a deux points fixes et un diamètre fixe.

3° Laissant λ fixe, on fait mouvoir le point (a, b) sur la parabole qui a pour équation $a=pb^2$, et l'on demande le lieu du point de rencontre de a parabole P avec celui de ses diamètres qui est conjugué à la direction ayant $\frac{a}{\lambda b}$ pour coefficient angulaire.

QUESTIONS PROPOSÉES

378. — Par un point donné O, d'une circonférence donnée C, on mène la sécante qui la coupe en D. Sur la droite DO on prend les longueurs DA et DB égales au diamètre de C, de sorte que $\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{2OC}$. Sur la même droite, on prend $\overline{OB'}=\overline{OB}$. On trace la perpendiculaire OL à AB, jusqu'à sa rencontre avec C, en L. Par le point B', on mène la droite parallèle à AL ; et, par le point A, la droite perpendiculaire à AL. Démontrer que le point M d'intersection de ces droites est situé sur une épicycloïde à deux rebroussements. (*Svéchnicoff*, à Troïtzk.)

379. — On donne une conique (C) et un point A. Trouver les coordonnées de l'orthocentre H du triangle formé par la polaire de A et par les tangentes à (C), issues de A.

Réciproquement, H étant connu, déterminer A.

(Kœnigs.)

380. — En diminuant les ordonnées d'une cissoïde, prises par rapport à son axe de symétrie, dans le rapport de 1 à $\sqrt{2}$, on obtient une cubique. Si, d'un point quelconque de cette cubique, on mène trois tangentes à la cissoïde, les droites joignant le point de rebroussement de la cissoïde aux points de contact de ces trois tangentes forment, avec l'axe de symétrie, un faisceau harmonique. *(E.-N. Barisien.)*

381. — En un point M d'une cissoïde, dont le point de rebroussement est O, on peut mener à la courbe, outre la tangente en M, une seconde tangente dont le point de contact est T. Le lieu du point de rencontre de la tangente en M, avec la droite OT, est une cubique ayant même point de rebroussement que la cissoïde et dont les ordonnées, par rapport à la tangente de rebroussement, sont celles de la cissoïde, multipliées par $2\sqrt{7}$. *(E.-N. Barisien.)*

382. — Les courbes dont l'équation est, en coordonnées rectangulaires : $y = kx^4 - h$ engendrent, par leur révolution autour de l'axe des y, des surfaces telles que, si l'on fait un orifice dans la paroi d'un vase formé avec l'une de ces surfaces, le mouvement du *niveau* d'un liquide s'écoulant par l'orifice est uniforme. *(Vase clepsydre.)* *(E. Lemoine.)*

ERRATA

Page 222, ligne 20 ; supprimez les mots : *une circonférence.*
— 239, ligne 10, *au lieu de :* MM_1, *lisez :* M_0M_1.
— ligne 20, *au lieu de : d, lisez :* 2*d*.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 22038-10-93.

CUBIQUES CIRCULAIRES

TANGENTES, NORMALES. QUADRATURES DES CUBIQUES PARTICULIÈRES

Par M. **Jan Cyane**, ancien élève de l'École Polytechnique

(*Suite* et *fin*, voir page 241.)

STROPHOÏDES

A. — Un angle constant $\widehat{PCM}$ tourne autour du centre C d'un cercle fixe *(fig. 10)* et le côté CP coupe la circonférence en un point P. On joint P à un point fixe O situé sur celle-ci et l'on prend l'intersection M de cette droite avec le second côté CM de l'angle constant. Le lieu du point M est une strophoïde.

La strophoïde est droite et symétrique par rapport au rayon OC, si l'angle constant $\widehat{PCM}$ est droit.

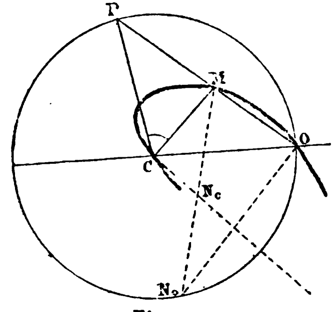


Fig. 10.

Il résulte, de la définition, que la vitesse angulaire du vecteur CM est double de celle du vecteur OM.

Normale. — Par suite, la normale en M est divisée dans le rapport inverse $\frac{1}{2}$ de ces vitesses angulaires, par les sous-normales en C et en O. On a donc:

$$\frac{MN_c}{MN_o} = \frac{1}{2}.$$

Strophoïde droite. — Quadrature. — Cherchons la surface balayée par le vecteur CM, l'angle $\widehat{PCM}$ étant droit *(fig. 11)*.

Menons en A diamétralement opposé à O et en P les tangentes au cercle, et soit T leur point d'intersection. La droite CT est bissectrice de l'angle $\widehat{PCA}$, et par suite parallèle

à PM. Bref, le quadrilatère TPMC est un parallélogramme et PT = CM.

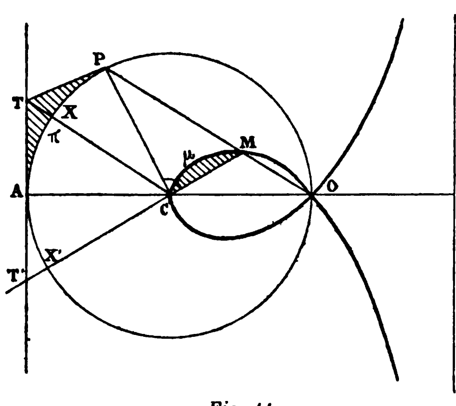


Fig. 11.

Soit $d\omega$ le déplacement angulaire élémentaire de CM ou de PT. Les deux aires élémentaires balayées par ces deux vecteurs sont égales :

$$\frac{1}{2}\,\overline{MC}^2 . d\omega = \frac{1}{2}\,\overline{PT}^2 . d\omega.$$

Intégrons les aires à partir du point C et du point A respectivement, et nous aurons :

aire seg. CμM = aire AπPTA,

ou = 2 aires tri. CMP — aire secteur ACP,

ou = aire tri. T'CT — aire secteur X'CX.

Ainsi l'aire d'un segment de strophoïde droite, comptée à partir du sommet C, équivaut à la différence entre l'aire d'un triangle et l'aire d'un secteur de cercle.

Surface de la boucle. — Soit a la longueur de l'axe CO. On trouve aisément :

$$S = 2a^2 - \frac{\pi}{2}\,a^2.$$

Surface comprise entre l'asymptote et les deux branches infinies. — Pour la trouver, cherchons d'abord deux relations entre les vecteurs CM et CM_1 de deux points de la strophoïde, situés sur une même sécante passant par le point C (*fig. 12*).

Les points correspondants P et P_1 du cercle sont diamétralement opposés. Les triangles semblables donnent aisément :

(1) $$CM.CM_1 = CP.CP_1 = a^2.$$

Ainsi le produit des vecteurs CM et CM_1 est constant.

Soit DU l'asymptote. On a OD = CO.

Soit OL la tangente au cercle, en O.

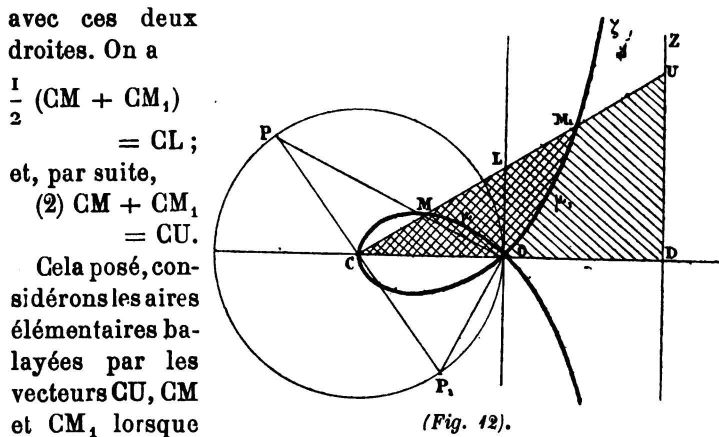
Soient enfin L et U les intersections de CM ou CM_1 avec ces deux droites. On a

$$\frac{1}{2}(CM + CM_1) = CL;$$

et, par suite,

$$(2)\quad CM + CM_1 = CU.$$

Cela posé, considérons les aires élémentaires balayées par les vecteurs CU, CM et CM_1 lorsque la sécante CU tourne de $d\omega$ autour de C.



(Fig. 12).

Nous aurons :

$$(3)\qquad \frac{1}{2}\overline{CU}^2 . d\omega - \frac{1}{2}\overline{CM}^2 . d\omega - \frac{1}{2}\overline{CM_1}^2 . d\omega$$
$$= \frac{1}{2} \times 2 . CM \times CM_1 . d\omega = a^2 . d\omega,$$

en vertu des relations (1) et (2).

Intégrons les aires à partir des points D et O, respectivement. En vertu de la relation (3), nous aurons :

$$(4)\left\{\begin{array}{l}\text{aire tri. CDU} - \text{aire secteur } CO\mu_1M_1 - \text{aire secteur } CO\mu M \\ \qquad = a^2 \times \text{angle } \widehat{DCU}\end{array}\right.$$

ou bien :

$$(5)\ \text{aire } ODUM_1\mu_1O - \text{aire secteur } CO\mu M = a^2 \times \text{angle } \widehat{DCU}.$$

Si les points U et M_1 s'éloignent vers le point Z situé à l'infini, sur l'asymptote DU, le point M se rapproche lui-même indéfiniment de C, et l'on a, à la limite :

$$(6)\qquad \text{aire } ODZ\zeta - \text{aire segm. } CO\mu MC = a^2 \times \frac{\pi}{2}.$$

D'où :

$$(7)\qquad \text{aire } ODZ\zeta = \frac{\pi}{2} . a^2 + a^2 - \frac{\pi}{4} a^2 = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) a^2 .$$

B. *Autre définition des strophoïdes.* — Prenons la définition habituelle de ces courbes *(fig. 13)*.

Étant donnés une droite OL, un point fixe O sur cette droite et un autre point fixe C hors de cette droite, par le point C on fait passer une sécante coupant la droite en L et l'on porte sur cette sécante deux segments LM et LM_1

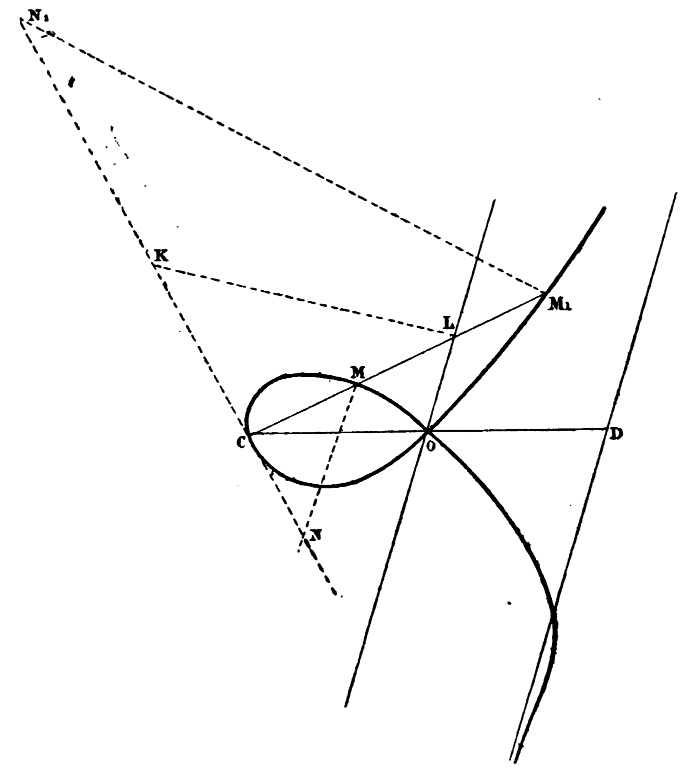


Fig. 13.

égaux à LO. Le lieu des points M ou M_1 est une strophoïde.

La strophoïde est droite, lorsque l'angle $\widehat{COL}$ est droit.

Sous-normale. — D'après cette définition, cherchons à construire la sous-normale en C.

En somme, nous transformons la droite OL définie par les deux vecteurs $OL = r$ et $CL = s$ et par une relation $f(r, s = o)$, en une autre courbe dont le vecteur CM ou CM_1,

que nous appellerons ρ ou ρ_1, est égal à la différence ou à la somme des vecteurs s et r:

$$\rho = s - r, \qquad \rho_1 = s + r.$$

De plus, le vecteur CM ou CM_1 fait, avec l'axe polaire CO, le même angle ω que le vecteur CL.

D'après ce système de transformation, on construit ainsi la sous-normale CN ou CN_1 : En L élevons la normale à OL jusqu'à sa rencontre en K avec la perpendiculaire élevée en C à CL. Portons en KN et en KN_1 une longueur égale à KL; nous avons :

$$CN = CK - KL,$$

et

$$CN_1 = CK + KL.$$

Les longueurs CN et CN_1 sont les sous-normales respectives des points M et M_1 relatives au pôle C. MN et M_1N_1 sont donc les normales de la strophoïde.

Démonstration. — Calculons la sous-normale relative au pôle

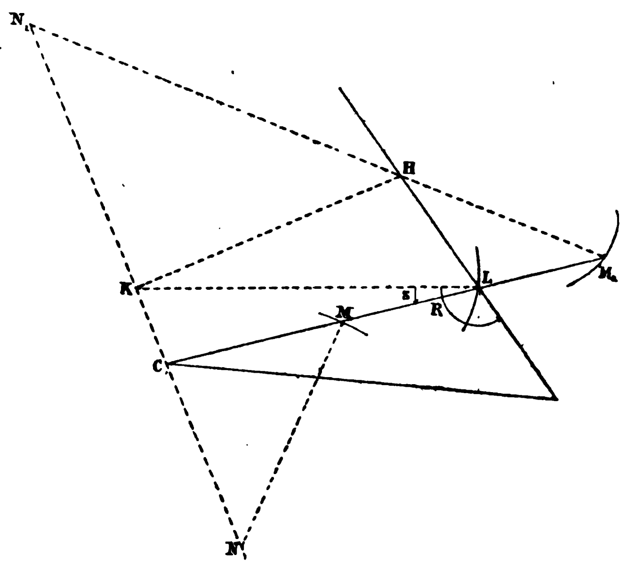


Fig. 14.

C, dans le cas d'une courbe quelconque, lieu de L transformée, comme il est dit ci-dessus *(fig. 14)*.

Soit d'abord LK la normale, en L, à la courbe lieu de L et soient R et S les angles qu'elle forme avec les vecteurs LO et LC.

Soient encore dr et ds les variations élémentaires de ces vecteurs, $d\omega$ étant la variation angulaire correspondante du vecteur LC. Dans le système de coordonnées bipolaires, on a la relation, facile à établir :

$$(1) \qquad \frac{\sin R}{\sin S} = \frac{dr}{ds};$$

d'autre part, dans le système de coordonnées polaires où C est le pôle, on a, pour la sous-normale CN du point M ;

$$(2) \qquad CN = \frac{d\rho}{d\omega}.$$

Or

$$\rho = s - r,$$

d'où :

$$(3) \qquad d\rho = ds - dr.$$

Substituons dans la relation (2) :

$$(4) \qquad CN = \frac{ds}{d\omega} - \frac{dr}{d\omega} = \frac{ds}{d\omega} - \frac{dr}{ds}\cdot\frac{ds}{d\omega}.$$

Remplaçons, dans (4), $\frac{ds}{d\omega}$ par sa valeur CK et $\frac{dr}{ds}$ par sa valeur $\frac{\sin R}{\sin S}$:

$$(5) \qquad CN = CK - CK\frac{\sin R}{\sin S}.$$

Mais la droite KH étant perpendiculaire à CL, on a

$$\frac{CK}{\sin S} = KL,$$

$$KL.\sin R = KH.$$

Nous avons, finalement :

$$CN = CK - KH,$$

ce qui justifie la construction du point N, extrémité de la normale en M.

On démontrerait de même que :

$$CN_1 = CK + KH.$$

Si l'on applique la construction à la strophoïde, le point H se confond avec le point L, et la longueur KH avec KL (*fig. 13*).

UNE TRANSFORMATION

DES FIGURES DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

par Mme Veuve F. Prime.

(*Suite* et *fin*, voir page 249.)

15. Lorsque la droite qui unit le pôle d'homologie au centre d'une conique circonscrite au triangle de référence est assujettie à passer par le point fixe P de coordonnées p, q, r, ces points engendrent la cubique Q dont l'équation est :

$$Q \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha(\alpha - \beta - \gamma) & \beta(\beta - \gamma - \alpha) & \gamma(\gamma - \alpha - \beta) \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

ou, plus simplement,

$$Q \equiv \sum p \cdot \frac{\beta - \gamma}{\alpha} = 0 \ (*).$$

Cette cubique est anallagmatique dans le système de trans-

(*) On pouvait prévoir que le lieu serait une cubique, car les points du lieu qui se trouvent sur une droite, issue de P, sont les intersections de cette droite et de la conique à laquelle elle donne naissance par la transformation du n° 2. Or, l'on sait que si une droite et une conique engendrent des faisceaux homographiques, leurs points d'intersection engendrent une cubique circonscrite au pentagone qui a pour sommets les centres de ces faisceaux.

Si l'on prenait, comme triangle de référence, le triangle complémentaire du triangle ABC, il faudrait faire usage des formules :

$$\frac{p}{q_1 + r_1} = \frac{q}{p_1 + r_1} = \frac{r}{p_1 + q_1},$$

et

$$\frac{\alpha}{\beta_1 + \gamma_1} = \frac{\beta}{\gamma_1 + \alpha_1} = \frac{\lambda}{\alpha_1 + \beta_1}.$$

On prouverait ainsi que la cubique Q est, par rapport à ce triangle la cubique anallagmatique, par points réciproques,

$$Q \equiv \Sigma p_1 \cdot \frac{\beta_1^2 - \gamma_1^2}{\beta_1 \gamma_1} = 0,$$

associée au point

$$P \equiv \frac{\alpha_1}{p_1} = \frac{\beta_1}{q_1} = \frac{\gamma_1}{r_1}.$$

formation défini au n° 2 et sa transformée par points réciproques est la cubique correspondant à l'équation

$$Q' \equiv \Sigma p\alpha^2(\beta - \gamma) = 0.$$

16. *Propriétés de la cubique* Q. — 1° La cubique Q est circonscrite au triangle de référence et au triangle complémentaire $A_1B_1C_1$.

2° Elle passe par le centre de gravité G du triangle de référence et par le point P.

3° Les tangentes menées aux points A, B, C, G, concourent au point P.

4° Si P_a, P_b, P_c sont les points algébriquement associés au point P, les tangentes à la cubique Q, aux sommets A_1, B_1, C_1 du triangle complémentaire, sont les droites A_1P_a, B_1P_b, C_1P_c. Ces tangentes se coupent, sur la cubique Q, au point P′ où vient aussi aboutir la tangente menée au point P.

Les coordonnées du point P′ sont

$$p(p - q - r), \quad q(q - r - p), \quad r(r - p - q).$$

Ce point est donc le centre de la conique représentée par

$$\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \frac{r}{\gamma} = 0$$

dont le pôle d'homologie est le point P.

5° En rapprochant le 3° du 4°, une propriété bien connue des cubiques (*) permet d'énoncer le théorème suivant : *lorsqu'un triangle est circonscrit à une conique, les droites qui joignent le pôle d'homologie aux sommets et au centre de gravité du triangle formé par les points de contact ont un rapport anharmonique égal à celui des droites qui joignent le centre de la conique aux sommets du triangle circonscrit et au pôle d'homologie* (*).

(*) V. Salmon (*Courbes planes*, 207), et *Journal de Mathématiques spéciales*, 1892, page 49.

(*) Par projection on en déduit ce théorème :

Le point δ étant le pôle de la droite Δ, par rapport à la conique C; on circonscrit un triangle à la conique C et on construit le pôle trilinéaire δ′ de Δ par rapport au triangle des points de contact. P étant le pôle d'homologie de la conique C, par rapport au triangle circonscrit, le rapport anharmonique des droites qui joignent P aux points de contact et à δ′ est égal à celui des droites qui joignent δ aux sommets du triangle circonscrit et à P.

17. *Propriétés de la cubique* Q'. — Désignons, par P_1, le réciproque de P; par P_{1a}, P_{1b}, P_{1c}, les points où les droites AP_1, BP_1, CP_1 coupent les côtés BC, CA, AB du triangle de référence; par P'', l'anticomplémentaire de P.

1° La cubique Q' est circonscrite au triangle de référence et au triangle $P_{1a}P_{1b}P_{1c}$.

2° Elle passe par le centre de gravité G du triangle de référence et par le réciproque P_1 de P.

3° Les tangentes aux points A, B, C, P_1 passent par G.

4° La tangente au point G est la droite GP.

Les cubiques Q', Q sont donc tangentes au point G, à la conique $ABCP_1G$; la tangente commune est la droite GP.

5° Les tangentes aux points P_{1a}, P_{1b}, P_{1c} sont les droites $P_{1a}G_a$, $P_{1b}G_b$, $P_{1c}G_c$ qui joignent ces points aux sommets G_a, G_b, G_c du triangle anticomplémentaire $G_aG_bG_c$.

Ainsi que nous l'avons démontré (*Journal de Mathématiques spéciales*, page 73, année 1892), les droites $G_{1a}P_{1a}$, $G_{1b}P_{1b}$, $G_{1c}P_{1c}$ concourent en un même point P'' qui est l'anticomplémentaire du réciproque de P_1, c'est-à-dire l'anticomplémentaire de P.

Ce point P'' appartient d'ailleurs à la cubique Q', car on vérifie immédiatement que

$$\Sigma p(-p+q+r)^2(q-r) = 0.$$

Et, comme la droite GP contient le point P'', la propriété des cubiques que nous rappelions tantôt nous donne, dans ce cas, l'égalité

$$P''(P_{1a}P_{1b}P_{1c}G) = G(A, B, C, P_1)$$

d'où l'on déduit le théorème suivant :

Lorsqu'un triangle est circonscrit à une conique, les droites qui joignent le centre de gravité aux sommets et au pôle d'homologie forment un faisceau anharmonique équivalent à celui des droites qui joignent l'anticomplémentaire du réciproque du pôle d'homologie aux points de contact et au centre de gravité du triangle circonscrit.

NOTE I (n° 7).

1. *Quand deux coniques sont circonscrites au triangle de référence, leur quatrième point d'intersection est le point harmoniquement associé à la droite qui joint les pôles d'homologie.*

Soient

$$\frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = 0,$$

$$\frac{l'}{\alpha} + \frac{m'}{\beta} + \frac{n'}{\gamma} = 0$$

deux coniques circonscrites au triangle de référence; ces lignes ont pour quatrième point commun le point

$$\alpha(mn' - nm') = \beta(nl' - ln') = \gamma(lm' - ml')$$

harmoniquement associé à la droite dont l'équation est

$$\alpha(mn' - nm') + \beta(nl' - ln') + \gamma(lm' - ml') = 0,$$

droite qui joint les pôles d'homologie (l, m, n), (l', m', n') des coniques proposées.

On peut encore dire que: *la droite qui passe par deux points est harmoniquement associée au réciproque du point d'intersection des transversales réciproques des harmonicales de ces deux points.*

Il résulte de là que, si le pôle d'homologie d'une conique circonscrite au triangle de référence décrit une ligne droite, la conique engendre un faisceau ayant, pour points fondamentaux, les sommets du triangle de référence et le point harmoniquement associé à la droite parcourue par le pôle d'homologie. Un théorème bien connu donne alors et très simplement le lieu du centre des coniques de ce faisceau; et, en observant que l'axe d'homologie de ces coniques trace des ponctuelles homographiques sur les côtés du triangle de référence, on obtient immédiatement l'enveloppe de ces coniques.

NOTE II (n° 7).

1. Si

(1) $$l\alpha = m\beta = n\gamma,$$

(2) $$l'\alpha = m'\beta = n'\gamma,$$

sont les pôles représentée par l'équation d'homologie, la quatrième tangente commune est la droite

(3) $$\frac{\alpha}{mn' - nm'} + \frac{\beta}{nl' - ln'} + \frac{\gamma}{lm' - ml'} = 0.$$

Cette droite est harmoniquement associée au point d'intersection des droites

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

$$l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0,$$

qui, elles, sont les harmonicales des pôles d'homologie (1), (2).

Mais (3) est aussi la transversale réciproque de la droite

$$\alpha(mn' - nm') + \beta(nl' - ln') + \gamma(lm' - ml) = 0$$

qui joint les réciproques

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n},$$

$$\frac{\alpha}{l'} = \frac{\beta}{m'} = \frac{\gamma}{n'}$$

des pôles d'homologie (1), (2),

2. Appliquons ces résultats aux circonférences inscrite et exinscrites.

Le pôle d'homologie de la circonférence inscrite (I) est, comme on le sait, le point de Gergonne :

$$\Gamma \equiv \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\frac{A}{2}} = \frac{\beta}{\operatorname{tang}\frac{B}{2}} = \frac{\gamma}{\operatorname{tang}\frac{C}{2}};$$

celui de la circonférence ex-inscrite dans l'angle A (I_a) est l'adjoint du point de Gergonne :

$$\Gamma_a \equiv -\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\frac{A}{2}} = \frac{\beta}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}} = \frac{\gamma}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}.$$

La quatrième tangente commune aux circonférences (I), (I_a) est donc la droite

$$T_a \equiv \frac{\alpha}{b-c} + \frac{\beta}{b} - \frac{\gamma}{c} = 0.$$

Désignons, par (T_aT_b), le point d'intersection des droites T_a, T_b. Les droites A (T_bT_c), B (T_cT_a), C (T_aT_b) qui vont des sommets du triangle de référence aux sommets du triangle formé par les tangentes T_a, T_b, T_c, ont pour équations

$$A\,(T_bT_c) \equiv \frac{\beta}{b(p-b)(c-a)} + \frac{\gamma}{c(p-c)(a-b)} = 0,$$

$$B\,(T_cT_a) \equiv \frac{\gamma}{c(p-c)(a-b)} + \frac{\alpha}{a(p-a)(b-c)} = 0,$$

$$C\,(T_aT_b) \equiv \frac{\alpha}{a(p-a)(b-c)} + \frac{\beta}{b(p-b)(c-a)} = 0.$$

Elles déterminent donc un triangle homologique au triangle de référence ; le pôle d'homologie est le point

$$\frac{x}{\cos B - \cos C} = \frac{y}{\cos C - \cos A} = \frac{z}{\cos A - \cos B}.$$

Ce point est, d'après M. Poulain, le différentien trilinéaire du centre de la circonférence circonscrite au triangle de référence ; il est l'intersection de l'axe antiorthique

$$x + y + z = 0$$

et de l'axe orthique

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C = 0.$$

L'axe d'homologie est la tranversale inverse de la droite IO qui joint le centre de la circonférence inscrite au centre de la circonférence circonscrite.

3. La quatrième tangente commune aux circonférences ex-inscrites (I_b), $(I)_c$ est la droite

$$T^{bc} = \frac{\alpha}{b+c} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0.$$

Les trois tangentes T_{bc}, T_{ca}, T_{ab} forment donc un triangle homologique au triangle de référence; le pôle d'homologie est le point supplémentaire du centre de la circonférence circonscrite; ses coordonnées valent

$$\frac{x}{\cos B + \cos C} = \frac{y}{\cos C + \cos A} + \frac{z}{\cos A + \cos B},$$

il appartient donc à la droite IO.

Quant à l'axe d'homologie, en vertu d'un théorème de d'Alembert, il coïncide avec l'axe antiorthique

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0.$$

4. Il résulte encore de ce théorème de d'Alembert que le triangle (T_b, T_c, T_{bc}) est homologique au triangle de référence et que l'axe d'homologie est la droite

$$-\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0$$

qui joint les pieds des bissectrices intérieures des angles B, C.

5. Par projection conique, on déduit de là le théorème suivant :

Le triangle A'B'C' *étant circonscrit et homologique au triangle* ABC, *on construit trois coniques inscrites au triangle* ABC *et pour lesquelles les points* A', B', C' *sont, respectivement, les pôles d'une droite donnée* Δ ; *on mène, à ces coniques, les tangentes*

communes autres que les côtés du triangle ABC. *Le triangle formé par ces tangentes est homologique, à la fois, aux triangles* ABC, A'B'C', *et l'axe d'homologie est le même dans les deux cas.*

NOTE III (Sur le cercle H).

Le cercle polaire conjugué (H) a pour équation

$$(H) \equiv \sum \alpha^2 \operatorname{cotg} A = 0.$$

La droite $D \equiv l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$

est donc, par rapport à (H), la polaire du point

$$P \equiv \frac{\alpha}{l \operatorname{tang} A} = \frac{\beta}{m \operatorname{tang} B} = \frac{\gamma}{n \operatorname{tang} C}.$$

Ce point est le *tangentien* du point

$$P' \equiv \frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n}$$

qui est l'*antitangentien* de P.

Dès lors, les propriétés des pôles et polaires justifient immédiatement les propositions suivantes :

1° *Si un point décrit une ligne droite, la polaire trilatère de son antitangentien passe par un point fixe de la perpendiculaire abaissée de l'orthocentre sur la droite considérée.*

2° *Si un point décrit une circonférence passant par l'orthocentre, la polaire trilatère de son antitangentien enveloppe une parabole ayant l'orthocentre pour foyer et dont l'axe passe par le centre de la circonférence considérée.*

3° *Si un point décrit une circonférence ne passant pas par l'orthocentre, la polaire trilatère de son antitangentien enveloppe une conique dont l'orthocentre est un foyer et dont l'axe focal est la droite qui joint l'orthocentre au centre de la circonférence considérée.*

4° Si *un point décrit une conique, dont l'orthocentre est un foyer; la polaire trilatère de son antitangentien enveloppe une circonférence dont le centre est sur l'axe focal de la conique considérée.*

CONCOURS GÉNÉRAL

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Par M. **Michel**, élève au collège Chaptal.

On donne une conique (S) *et un triangle* ABC *conjugué par rapport à cette conique.*

1° *Démontrer que par un point* P *quelconque de* (S) *passent quatre coniques circonscrites au triangle* ABC *et touchant* (S) *chacune en un point, autre que* P.

2° *Les points où ces quatre coniques touchent* (S) *sont situés sur une conique* (S_1) *circonscrite au triangle* ABC.

3° *Quand le point* P *décrit la conique* (S), *la conique* (S_1) *enveloppe une courbe* (Γ) *du quatrième ordre.*

4° *D'un point* M *de la courbe* (Γ), *on peut mener, à cette courbe, quatre tangentes autres que celles qui touchent la courbe en* M. *Démontrer que les points où les quatre tangentes touchent* (Γ) *sont sur une même droite* (D), *et trouver l'enveloppe de la droite* (D) *quand le point* M *décrit la courbe* (Γ).

SOLUTION ANALYTIQUE(*)

1° et 2°. — Prenons le triangle ABC pour triangle de référence. L'équation de la conique (S) est alors

$$(S) \qquad AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 0.$$

Soient x_0, y_0, z_0, les coordonnées d'un point P de (S). L'équation d'une conique qui touche la conique (S) en un point M, dont les coordonnées sont x, y, z, est de la forme

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 + (uX + vY + wZ)(AxX + ByY + CzY) = 0.$$

Si cette conique est circonscrite au triangle ABC, on a les conditions

$$ux + 1 = 0, \qquad vy + 1 = 0, \qquad wz + 1 = 0.$$

Si, de plus, elle passe par le point P, on a

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0.$$

(*) Voyez (*Journal*, p. 190) une autre solution de cette question.

En éliminant u, v, w, entre les quatre conditions précédentes, on obtient

$$\frac{x_0}{x} + \frac{y_0}{y} + \frac{z_0}{z} = 0,$$

ce qui montre que le point de contact M est sur la conique (S_1), circonscrite au triangle de référence, et dont l'équation est

$$(S_1) \qquad \frac{x_0}{X} + \frac{y_0}{Y} + \frac{z_0}{Z} = 0.$$

Il y a, par suite, quatre points tels que M et quatre coniques passant par P, touchant la conique (S) et circonscrites au triangle de référence.

3° Cherchons l'enveloppe de la conique (S_1), quand le point P se déplace sur la conique (S). A cet effet, faisons correspondre à un point de la conique (S_1), dont les coordonnées sont X, Y, Z, le point dont les coordonnées sont : $\frac{1}{AX}, \frac{1}{BY}, \frac{1}{CZ}$. La conique (S_1) se transforme alors en une droite (T_1) dont l'équation est

$$AXx_0 + BYy_0 + CZz_0 = 0,$$

avec la condition $\qquad Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 = 0.$

L'enveloppe de cette droite est évidemment la conique (S); l'enveloppe (Γ) de la conique (S_1) est, par suite, la courbe déduite de la conique (S) par la transformation du second ordre précédente, qui est réciproque. Son équation est

$$\frac{1}{AX^2} + \frac{1}{BY^2} + \frac{1}{CZ^2} = 0.$$

La courbe (Γ) est une quartique qui admet les points A, B, C, comme points doubles, les tangentes en ces points étant les tangentes issues, de chacun d'eux, à la conique (S).

4° Prenons maintenant la conique (S′) dont l'équation est

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 0.$$

Par un point quelconque de cette conique passent quatre coniques circonscrites au triangle ABC et tangentes à la conique (S′). A un point de la figure, dont les coordonnées sont X, Y, Z, faisons correspondre le point dont les coordonnées sont $\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z}$. Alors la conique (S′) se transforme

en la quartique (Γ); les quatre coniques deviennent les quatre tangentes qu'on peut mener à la quartique (Γ) d'un point M de cette courbe; les points de contact de ces tangentes sont sur la droite D, transformée de la conique (S'_1), circonscrite du triangle de référence, qui contient les points de contact des quatre coniques.

L'enveloppe de la conique (S'_1) est la quartique dont l'équation est

$$\frac{A}{X^2} + \frac{B}{Y^2} + \frac{C}{Z^2} = 0.$$

L'enveloppe de la droite (D) est par suite la courbe dont l'équation est

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 0,$$

c'est-à-dire la conique (S) primitive.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE (*)

Transformons homographiquement la figure, de façon que deux des sommets du triangle, B et C, deviennent les points cycliques. Les points d'intersection de la droite BC avec la conique (S), étant conjugués harmoniques par rapport aux points B et C, se transforment en les points à l'infini de deux directions rectangulaires. La conique (S) se transforme donc en une hyperbole équilatère (s) qui admet pour centre le transformé a du point A.

Il s'agit alors de démontrer que, par un point p d'une hyperbole équilatère (s), passent quatre cercles contenant le centre a de cette hyperbole et la touchant chacun en un point autre que p, et que les points de contact de ces cercles sont sur un même cercle passant par a.

Soit donc un de ces cercles ω; appelons I son point de contact et q le quatrième point d'intersection avec l'hyperbole. L'hyperbole (s) et le cercle (ω) sont homologiques, le centre d'homologie étant le point I, l'axe d'homologie la droite pq. Menons, par le point I, les parallèles aux asymptotes, qui rencontrent le cercle aux points α et β. La droite $\alpha\beta$, qui est la transformée de la droite de l'infini considérée comme

(*) Cette solution est celle à laquelle on a donné le prix d'honneur.

appartenant à l'hyperbole (s), est parallèle à l'axe d'homologie pq. Or, les droites $I\alpha$ et $I\beta$ sont les bissectrices de l'angle formé par le rayon vecteur Ia et la tangente en I; donc, dans le cercle ω, la droite Ia est perpendiculaire à la droite $\alpha\beta$ et, par suite, à la droite pq. Cela posé, considérons le point I' diamétralement opposé à I sur l'hyperbole. Les tangentes en I et en a au cercle et par suite la tangente en I' à l'hyperbole et la tangente en a au cercle sont également inclinées sur le diamètre II'. D'autre part, la tangente en a, au cercle, et la tangente en I', à l'hyperbole, sont des droites homologues qui se coupent par conséquent sur l'axe pq. Il en résulte que p est équidistant de a et de I' et que, par suite, son symétrique p', par rapport à a, est équidistant de I et de a. Les points tels que I sont donc sur un cercle (s_1) qui a son centre en p' et qui passe par le centre a de l'hyperbole (s).

3° Cherchons l'enveloppe des cercles (s_1), qui passent par le point a et dont le centre décrit l'hyperbole (s). D'après un théorème général, cette enveloppe est l'homothétique, dans le rapport 2 : 1, de la podaire de cette hyperbole par rapport au centre a. Cette enveloppe, étant une podaire de conique, est une courbe γ du quatrième ordre, admettant un point double au point a et passant par les points cycliques, qu'elle admet aussi comme points doubles. Cette quartique est une lemniscate de Bernoulli; elle admet évidemment comme tangentes en a les asymptotes de l'hyperbole équilatère. En revenant à la figure donnée, l'enveloppe des coniques (S_1) est une quartique (Γ) qui admet comme points doubles le point A et les points B et C par symétrie. Les tangentes en ces points sont les tangentes issues de chacun d'eux à la conique (S), ce qui confirme ce théorème bien connu sur les quartiques trinodales : les six tangentes aux points doubles sont tangentes à une même conique; cette conique est ici la conique (S). Les tangentes au point a à la lemniscate étant d'inflexion, les six tangentes aux points doubles de la quartique (Γ) sont aussi des tangentes d'inflexion.

4° Nous allons faire, sur la quartique γ, une remarque importante qui va nous permettre de déduire des propriétés

de la question (2), celles de la question (4). Considérons la conique (σ), homothétique, dans le rapport 2 : 1, de la conique (s), par rapport au point a; c'est une hyperbole équilatère qui a son centre en a; et la quartique γ est la podaire de cette hyperbole, relativement à son centre. Cela posé, transformons la conique (σ) par polaires réciproques par rapport au cercle concentrique et bitangent; elle devient alors une hyperbole équilatère qui a même centre et mêmes sommets que l'hyperbole σ; elle se transforme donc en elle-même; par conséquent la quartique γ est la transformée, par rayons vecteurs réciproques, de l'hyperbole σ, le centre d'inversion étant le point a et la puissance d'inversion le carré du demi-axe de l'hyperbole. Cette propriété résulte immédiatement du théorème connu qui lie les transformées par polaires et rayons vecteurs réciproques d'une courbe à la podaire de cette courbe.

Cela posé, appliquons à l'hyperbole (σ) les propriétés des paragraphes (1) et (2), et transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, par rapport au cercle concentrique et bitangent. L'hyperbole (σ) se transforme en la quartique γ; les quatre cercles tangents à (σ), passant par un point quelconque de l'hyperbole et par le centre, deviennent les quatre tangentes qu'on peut mener à la quartique d'un point de cette courbe. Les points de contact de ces tangentes sont sur la droite d, transformée du cercle (σ_1) qui passe par le centre a et qui contient les points de contact des quatre cercles.

L'enveloppe de la droite d est la transformée de l'enveloppe du cercle (σ_1), qui est évidemment l'homothétique dans le rapport 2 : 1 de la quartique (γ), par rapport au point a. Donc l'enveloppe de la droite d est l'homothétique, dans le rapport 1 : 2 de la conique (σ), transformée, par rayons vecteurs réciproques, de la quartique (γ); c'est donc la conique (s).

Remarques. — Prenons comme triangle conjugué par rapport à la conique (S) le triangle particulier formé par les axes et la droite de l'infini. Toute conique circonscrite à ce triangle est une hyperbole d'Apollonius de la conique et, par suite, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Par un point quelconque (P) d'une conique (S), passent

quatre hyperboles d'Apollonius, touchant (S) chacune en un point autre que P, et les points de contact sont situés sur une hyperbole d'Apollonius.

Or, la normale en P, à la conique, rencontre les normales aux quatre points de contact, aux points où ces normales touchent leur enveloppe; et, d'après le théorème précédent, ces quatre normales sont concourantes. L'énoncé précédent se modifie alors de la façon suivante :

Les tangentes aux points où une tangente à la développée rencontre la courbe sont concourantes.

Nous pouvons donner une démonstration analytique simple de cet énoncé. Soient α et β les coordonnées du point de contact d'une des quatre hyperboles d'Apollonius tangentes à la conique (S). La droite qui joint les deux autres points d'intersection de cette hyperbole avec (S) a, comme on sait, pour équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + 1 = 0.$$

Cette droite doit évidemment passer par le point P (x_0, y_0). Donc on a :

$$\frac{x_0}{\alpha} + \frac{y_0}{\beta} + 1 = 0,$$

ce qui montre que les points (α, β) sont sur l'hyperbole d'Apollonius (S_1) dont l'équation est

$$\frac{x_0}{x} + \frac{y_0}{y} + 1 = 0.$$

Observation (*). — Cette solution montre que la question du concours n'est qu'une transformation d'une propriété classique de la lemniscate.

On sait que, si par un point de la lemniscate on mène à la courbe quatre tangentes, les quatre points de contact sont sur une droite qui enveloppe une hyperbole équilatère inverse de la lemniscate par rapport au centre.

En transformant cette double propriété d'abord par inversion par rapport au centre, puis par homographie en conser-

(*) Cette remarque est due à M. Boulanger, professeur à l'École des Beaux-Arts de Lille, qui nous avait adressé une solution géométrique de la précédente question.

vant le centre A et en amenant les points cycliques en deux points B et C à distance finie, on obtient les propriétés signalées dans l'énoncé.

Réciproquement, la solution de M. Michel établit géométriquement la propriété de la lemniscate.

CORRESPONDANCE

M. Delens, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Rouen, nous adresse la lettre suivante, rectifiant la solution donnée, dans le numéro de juin 1892, de la question 298 :

« Permettez-moi de vous signaler une erreur qui me paraît s'être glissée dans la solution de la question 298. — Si l'on fait en effet la première transformation indiquée, on trouve pour dernière ligne du déterminant : $x-a_n$, $x-a_n$... $x-a_n$, a_n, et non : $x-a_n$ o ... o a_n; ce qui vicie tout le reste des calculs.

» Il est du reste facile de rétablir le résultat exact en écrivant, dans cette dernière ligne ainsi rectifiée, le terme a_n sous la forme : $(a_n - x) + x$, et décomposant ensuite le déterminant en deux déterminants différant seulement par la dernière colonne, le deuxième contenant alors x en facteur. — On trouve ainsi, pour le déterminant donné, l'expression connue : $\Delta = f(x) - xf'(x)$, en posant : $f(x) = (a_1 - x)\ldots(a_n - x)$; ce qui permet de vérifier facilement la propriété énoncée à l'aide du théorème de Rolle ».

Extrait d'une lettre de M. Droz-Farny, professeur au lycée de Porentruy :

« Dans sa solution de la question 335, p. 237, M. Lebesgue n'a pas signalé un fait curieux qui ressort cependant de ses calculs. Pour un point P choisi sur un diamètre (D) perpendiculaire à l'une des diagonales du rectangle des axes, l'hyperbole d'Apollonius a son centre sur cette diagonale et elle est tangente en O à la seconde diagonale. Pour ce point P, le problème des normales devient *quadratique*.

» Pour les points situés sur les deux droites telles que D on peut construire les normales en n'employant que la règle et le compas. »

EXERCICE ÉCRIT

74. — On considère tous les cercles C qui passent par le foyer F d'une parabole donnée et qui sont tangents à cette courbe; et l'on demande :

1° l'équation générale de ces cercles C.

2° le lieu de leurs centres.

3° Par un point P du plan passent, en général, trois cercles C; n'y a-t-il exception pour aucun point du plan?

4° Montrer que le centre de gravité du triangle formé par les trois points de contact, avec la parabole, des cercles qui correspondent à un même point P se déplace, quand P varie, sur une parabole de même axe que la parabole donnée et dont on demande l'équation.

5° Trouver le lieu du point P quand le cercle circonscrit au triangle des points de contact passe : 1° par le sommet de la parabole; 2° par son foyer; 3° a son centre sur l'axe de la parabole; 4° a un rayon constant. *(Delens.)*

Notes sur l'exercice 73.

Sur Δ prenons deux points; les plans polaires de ces points se coupent sur une droite Δ' passant par les points de contact P, P'.

Soient

$$\frac{x-x_0}{\lambda}=\frac{y-y_0}{\mu}=\frac{z-z_0}{\nu},$$

les équations de Δ; celles de Δ' sont

$$Axx_0+Byy_0+Czz_0=1,$$
$$\lambda Ax+\mu By+\nu Cz=0;$$

si la quadrique est représentée par

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1.$$

Le milieu de PP' est à l'intersection de Δ' avec le plan diamétral conjugué de cette droite. On trouve ainsi, pour représenter le lieu décrit par le milieu de PP', les équations

$$Axx_0+Byy_0+Czz_0=1,$$
$$Ax(x_0z-xz_0)=By(z_0y-y_0z).$$

Le lieu est une conique Γ.

a) Si Γ est dégénérée, on a

$$z_0(By_0^2+Ax_0^2)=0.$$

b) Si Γ est une parabole, le point est situé sur le cône asymptote de la quadrique, etc...

QUESTION 337

Solution par M. H. LEBESGUE, élève au lycée Louis le-Grand.

Dans un déterminant de Vandermonde

$$\left| 1 \quad x_1 \quad x_1^2 \quad \ldots \quad x_1^{n-1} \right|$$

on remplace les éléments de la dernière colonne par

$$x_1^{(n-1)+p}, \quad x_2^{(n-1)+p}, \quad \ldots \quad x_n^{(n-1)+p}.$$

Démontrer que le déterminant ainsi obtenu est égal au déterminant de Vandermonde, multiplié par la somme des combinaisons p *à* p, *avec répétition, des lettres* $x_1, x_2, \ldots x_n$. (Vautré.)

Posons :

$$V_n^p = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x^{n-2}, & x_1^{(n-1)+p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-2}, & x_n^{(n-1)+p} \end{vmatrix},$$

et désignons par $\sum_{x_1x_2\ldots x_n}^p$ la somme des combinaisons p à p, avec répétition, des lettres $x_1, x_2, \ldots x_n$. — Il s'agit de démontrer l'identité

$$V_n^p = V_n^0 \sum\nolimits_{x_1x_2\ldots x_n}^p.$$

D'abord, elle est vraie pour un déterminant du second ordre, car

$$V_2^p = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{p+1} \\ 1 & x_2^{p+1} \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_2^p + x_1x_2^{p-1} + \ldots + x_1^p) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \sum\nolimits_{x_1x_2}^p$$

Supposons qu'elle soit vérifiée, quel que soit p, pour le déterminant V_{n-1}^p.

Soustrayons, dans V_n^p, chacune des $(n-2)$ premières colonnes, après l'avoir multipliée par x_n, de la suivante, et soustrayons la $(n-1)^{\text{ème}}$, multipliée par x_n^{p+1}, de la dernière.

$$V_n^p = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n, & x_1(x_1 - x_n) & \ldots & x_1^{n-3}(x_1 - x_n), & x_1^{n-2}(x_1^{p+1} - x_n^{p+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n-1} - x_n, & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & \ldots & x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1} - x_n), & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}^{p+1} - x_n^{p+1}) \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Divisant les $(n-1)$ premières lignes respectivement par $(x_n - x_1), (x_n - x_2), \ldots (x_n - x_{n-1})$:

$$V_n^p = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1}) \begin{vmatrix} 1, & x_1, & \dots & x_1^{n-3}, & x_1^{n-2}\sum^p_{x_1 x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & x_{n-1}, & \dots & x_{n-1}^{n-3}, & x_{n-1}^{n-2}\sum^p_{x_{n-1} x_n} \end{vmatrix}$$

Développant ce dernier déterminant:

$V_n^p = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})[V_{n-1}^p + x_n V_{n-1}^{p-1} + \dots + x_n^p V_{n-1}^0]$

Mais, par hypothèse,

$$V_{n-1}^k = V_{n-1}^0 \sum^k_{x_1 x_2 \dots x_{n-1}};$$

donc

$$(1) \quad V_n^p = V_n^0 \left[\sum^p_{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} + x_n \sum^{p-1}_{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} + \dots + x_n^p\right].$$

ce qui revient évidemment à

$$V_n^p = V_n \sum^p_{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Remarque (*). — Désignons par $\sum^k_n$ la somme des combinaisons k à k, avec répétition, des lettres $x_1, x_2, \dots x_n$, et par (**) $\sum'^k_n$ la somme des combinaisons k à k, sans répétition, des mêmes lettres.

On a : $\quad V_n^0 = V_{n-1}^0 (x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1}),$

ou $\quad V_n^0 = V_{n-1}^0 \left[x_n^{n-1} - \sum'^1_{n-1} x_n^{n-2} + \dots + (-1)^k \sum'^k_{n-1} x_n^{n-k-1} + \dots + (-1)^{n-1} x_1 x_2 \dots x_{n-1}\right]$

Portant cette valeur dans l'identité (1):

$$(2) \quad \begin{cases} V_n^p = V_{n-1}^0 \left[x_n^{n-1} - \sum'^1_{n-1} x_n^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} x_1 x_2 \dots x_{n-1}\right] \\ \qquad \left[x_n^p + x_n^{p-1} \sum^1_{n-1} + \dots + \sum^p_{n-1}\right]. \end{cases}$$

Or, si l'on développe V_n^p suivant les puissances de x_n, les coefficients des termes des degrés $(n+p-2)$, $(n+p-3)$,...$(n-1)$ sont nuls; donc il en est de même dans le produit qui figure au second membre de l'identité (2). On obtient ainsi, en supprimant le facteur V_{n-1}^0, qui n'est pas nul, et en remplaçant

(*) Cette remarque est de M. Vautré.

(**) Ce symbole peut s'énoncer en disant *Somme prime k*.

$(n - 1)$ par m, les relations suivantes :

$$\sum_m^1 - \sum_m'^1 = 0.$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_m^p - \sum_m^{p-1}\sum_m'^1 + \ldots + (-1)^k \sum_m^{p-k}\sum_m'^k + \\ \qquad\qquad \ldots + (-1)^p \sum_m'^p = 0 \end{array} \right.$$

Si l'on suppose $x_1 = x_2 = \ldots x_m = 1$, que l'on désigne par Γ_m^k le nombre des combinaisons k à k, avec répétition, de m objets, et par C_m^k le nombre de ces combinaisons, sans répétition, la relation (3) donne :

$$(4)\ \Gamma_m^p - \Gamma_m^{p-1}C_m^1 + \ldots + (-1)^k\Gamma_m^{p-k}C_m^k + \ldots + (-1)^p C_m^p = 0.$$

Il est clair que les premiers membres des relations (3) et (4) doivent se terminer, s'il y a lieu, au terme pour lequel $k = m$; mais comme les expressions $\sum_m'^k$ et C_m^k sont identiques à zéro, quand on suppose $k > m$, on peut, dans tous les cas, conserver tous les termes.

Si l'on substitue dans (4) les valeurs des symboles Γ et C, on obtient une équation en m, vérifiée, d'après ce qui précède, pour toutes les valeurs entières et positives de m. C'est donc une pure identité : et l'on a, p étant un entier positif, x étant quelconque :

$$\frac{x(x+1)\ldots(x+p-1)}{p!} - \frac{x(x+1)\ldots(x+p-2)}{(p-1)!}\cdot\frac{x}{1} + \frac{x(x+1)\ldots(x+p-3)}{(p-2)!}\cdot\frac{x(x-1)}{2!} \ldots + (-1)^p\frac{x(x-1)\ldots(x-p+1)}{p!} = 0.$$

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 22038-10-93.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Algèbre.

Géométrie pure et Mécanique.

Calcul intégral.

Géométrie analytique.

Concours divers.

Bibliographie et Correspondance.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 24640-11-93.